

Signály a soustavy

doc. Ing. František Vejražka, CSc.

1992

Skriptum je určeno pro posluchače 3. ročníku oboru radiotechnika elektrotechnické fakulty ČVUT. Vzniklo úplným přepracováním textu [1] na základě zkušeností získaných při přednáškách vedených v letech 1979-1983. Proti prvnímu vydání je podstatně větší pozornost věnována vyjádření signálu v kmitočtové oblasti, které je pro čtenáře méně obvyklé, ale mnohdy značně zjednoduší úvahy. Aby si čtenář toto vyjádření osvojil, je ve skriptu velké množství obrásků. Podle mého názoru je nezbytné, aby budoucí radiotechnický inženýr věděl, že vyjádření signálu v kmitočtové oblasti je rovnocenné s vyjádřením v oblasti časové.

Podstatného rozšíření doznala i kapitola o náhodných signálech. Naši posluchači se často mylně domnívají, že radiotechnika je umění sestavit přijímač vysoké jakostní třídy. Moderní radiotechnika je radiotechnikou statistickou. Na základě analýzy statistických vlastností signálu a rušení se nalezne např. vztah minimalizující pravděpodobnost chyby při přenosu dat, maximalizující pravděpodobnost nalezení cíle radiolokátorem, vztah pro největší přesnost radiového určení polohy. Algoritmizace, přístrojová realizace tohoto vztahu vede k řešení problému. Takovéto pojetí radiotechniky je poměrně náročné. Snažil jsem se proto vybrat jen problémy, které bude posluchač potřebovat při studiu dalšího textu nebo dalších předmetů. Práce na skriptu z odborného hlediska není ve své valné části prací nikterak objevnou, ale shrnutím více či méně známých poznatků a postupů. Postupy bývají různé - volil jsem ty, které jsou jednoduché, - ostatně vždy je citována literatura a čtenář může sám porovnat přístup různých autorů ke stejnému problému.

Skriptum je určeno pro předmět průpravný. Proto např. u modulací se čtenář seznámí s jejich podstatou a s problémy systémovými. Konstrukční detaily mu poskytne specializované předměty studia.

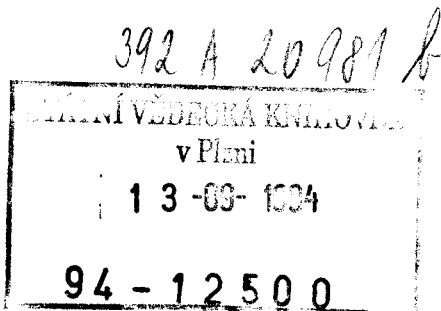
Přes veškerou snahu a péči se do textu jistě vloudily chyby, některé formulace shledá čtenář nepřesné nebo nesrozumitelné. Budu vděčen za upozornění na nedostatky. Jen tak bude mít práce, které jsem věnoval většinu dnů krásného léta 1983, smysl.

V Praze, duben - srpen 1983

František Vejražka

Děkuji všem posluchačům a aspirantům, kteří mne upozornili na chyby v textu prvního vydání a pomohli tak při přípravě vydání druhého.

V Praze, únor 1987



1. Z Á K L A D N Í C H A R A K T E R I S T I K Y S I G N Á L Ů A S O U S T A V

1.1 S I G N Á L Y A S O U S T A V Y

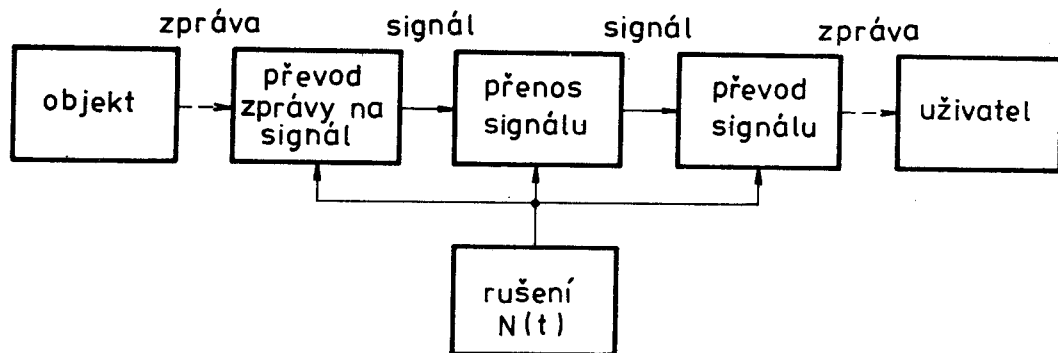
Běžný život přináší potřebu informovat člověka o stavu určitých objektů. K tomu slouží soustavy zajišťující generování, přenos a zpracování zpráv. Obecné schéma takovýchto soustav je na obr. 1.1.

Zprávy mohou být nejrůznějšího původu a povahy. Např. obraz objektu, údaj o teplotě, vzdálenost. Množině stavů objektu odpovídá množina možných zpráv. Příjemce zpráv zpravidla neví, v jakém stavu objekt je a tato neznalost se přenosem zpráv odstraňuje nebo zmenšuje.

U příjemce zprávy je tedy před jejím přenosem "neurčitost" o stavu objektu; po přenosu zprávy je tato neurčitost zčásti nebo zcela odstraněna. Do jaké míry je neurčitost odstraněna závisí na množství informace, které zpráva nese. Jednotlivé stavy objektu se z hlediska příjemce vyskytují s určitou pravděpodobností a s touto pravděpodobností se generují i odpovídající zprávy. Je-li příjemce zpráv informován o tom, že se vyskytl stav, který má velkou pravděpodobnost, nebyla odstraněná nejistota o stavu objektu velká a zpráva přenesla jen malé množství informace. Naopak při přenosu zprávy o stavu, který se vyskytuje s malou pravděpodobností, nese zpráva velké množství informace.

Zprávu je třeba pro přenos upravit - převést na změny fyzikální veličiny pro přenos vhodné (el. proud, tlak vzduchu, intenzita světla, tištěné znaky) - tj. vytvořit signál (elektrický, pneumatický, optický). Signál se přenáší vhodným médiem a převádí do takového tvaru, který může příjemce zprávy využít.

Pokud je jednoznačný vztah mezi stavem objektu a zprávou u příjemce, pracuje soustava bez rušení. Vyskytuje-li se v soustavě rušení, mohou být při stejném stavu objektu příjemcem přijímány různé zprávy. Soustava pak pracuje s rušením. Rušení zavádí do přenosu nežádoucí neurčitost, brání tak úplnému odstranění neurčitosti o stavu objektu a zmenšuje množství přenášené informace.



Obr. 1.1

Skutečnost, že v soustavě existuje rušení, vyjádříme tím, že kromě signálu užitečného, odpovídajícího přenášené zprávě, je přítomen rušivý signál.

V našem textu se budeme zabývat signály a soustavami. Na základě výše uvedeného budeme pod pojmem signál rozumět fyzikální veličinu $S(t)$, která je funkcí času t /2/. Zpravidla půjde o elektrickou fyzikální veličinu (např. proud, napětí) a tedy o elektrické signály. Je třeba upozornit na rozdíl mezi signálem $S(t)$ a funkcí $f(t)$ /3/. Funkce mohou být vzhledem k proměnné mnohoznačné, fyzikálně existující signály jsou jednoznačnou funkcí času t .

Pod pojmem soustava budeme rozumět /4/ množinu prvků vhodným způsobem spojených a vzájemně na sebe působících pod vlivem vnějších a vnitřních signálů za účelem splnění požadované funkce. V dalším výkladu půjde vesměs o elektronické soustavy tvořené elektronickými prvky. Soustavami se budeme zabývat v 7. kapitole.

1.2 DRUHY SIGNÁLŮ

Dříve než přistoupíme k analýze signálů, zmíníme se o jejich klasifikaci a základních vlastnostech. Podle toho, jak jsou definovány jejich hodnoty, dělíme signály na

- 1) determinované (regulární),
- 2) náhodné (stochastické).

Determinované signály jsou popsány nenáhodnou funkcí času a můžeme proto určit v každém okamžiku jejich hodnotu.

Náhodné signály jsou náhodné funkce času. Pro daný čas je velikost signálu náhodnou veličinou, nemůžeme předem určit její hodnotu; určit můžeme jen pravděpodobnost, že bude ležet v určitém intervalu. K náhodným signálům patří především rušení (šum), jehož složitá fyzikální podstata znemožňuje přesný popis všech dějů.

Také signály nesoucí zprávy musíme považovat za náhodné. Kdyby totiž stavy objektu, který sledujeme, byly determinovanou funkcí času, znali bychom je předem pro libovolný okamžik a nebylo by třeba zajišťovat přenos zpráv. Z tohoto hlediska determinované signály, tak jak se jimi budeme dále zabývat, jsou idealizací - předpokládáme, že jejich parametry jsou předem dány a nejsou ovlivňovány např. přenášenými zprávami. Náhodným signálům je věnována 6. kapitola.

Jak jsme uvedli, chápeme signály jako funkce. Podle povahy definičního oboru a oboru hodnot můžeme provést jejich další dělení /5/.

Podle povahy definičního oboru je dělíme na

- 1) signály se spojitým časem - jejich definičním oborem je časový interval; pro jednoduchost budeme přívlastek "se spojitým časem" často vynechávat,
- 2) posloupnosti - jejich definičním oborem je spočetná množina hodnot času; nejčastěji jsou hodnoty času, pro které je signál definován, násobkem kroku diskretizace T_V , tj.

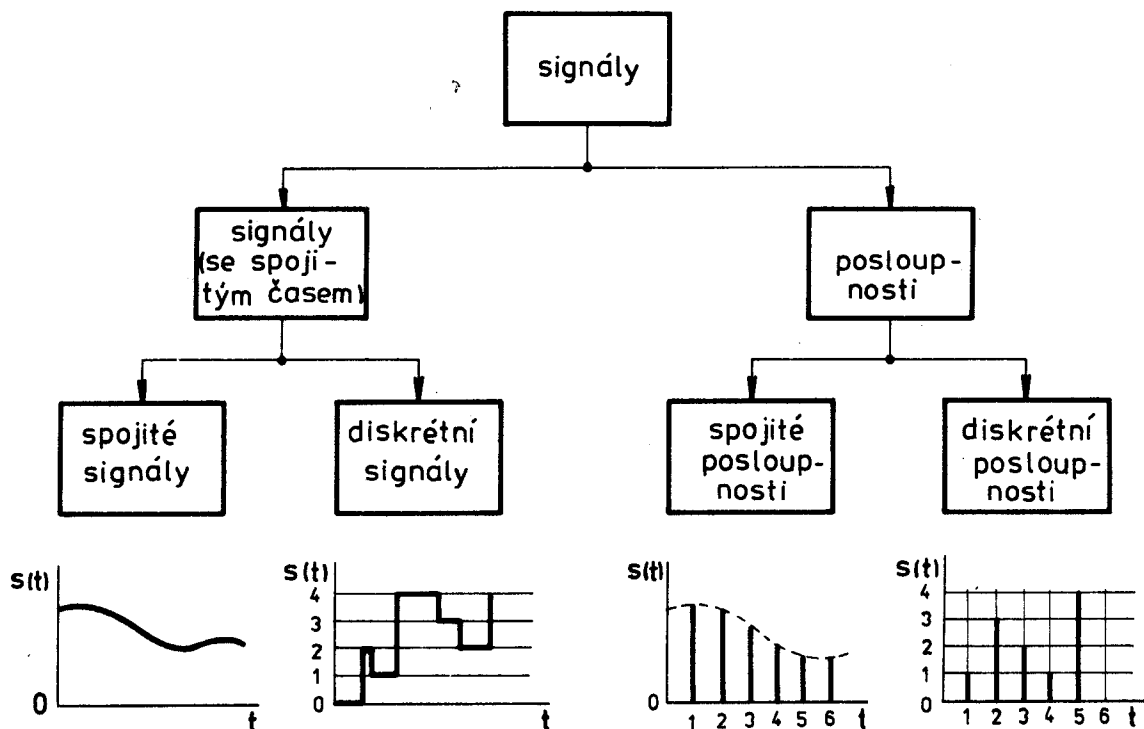
$$t = nT_V, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, T_V > 0,$$

někdy je nazýváme signály s diskrétním časem.

Podle povahy oboru hodnot signály dělíme na

- 1) spojité (nekvantované) - nabývají nespočetně mnoha hodnot z nějakého intervalu,
- 2) diskrétní (kvantované) - nabývají konečného počtu hodnot z nějakého intervalu.

Rozdělení signálů je znázorněno na obr. 1.2.



Obr. 1.2

Poznamenejme, že se často uvádějí i jiné termíny (např. [6]):

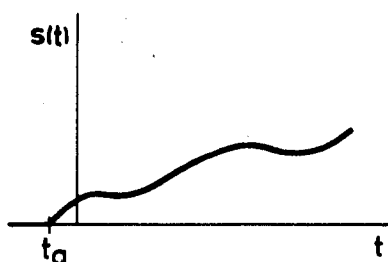
- spojité signály se nazývají analogové,
- diskrétní signály se nazývají impulsové signály,
- diskrétní posloupnosti se nazývají číslicové (digitální) signály.

V dalším textu budeme zachovávat rozdělení podle obr. 1.2.

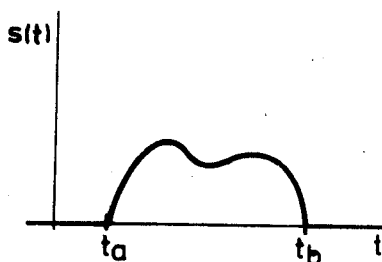
Signály, které se vyskytují v technické praxi, mají vždy vyjádřený počátek (zdroj reálného skutečně existujícího signálu musel být někdy zapnut)

$t = t_0$. Pro $t < t_0$ je signál identicky roven nule. Takovýto signál se nazývá kauzální (příčinný) - viz obr. 1.3.

Vzhledem k tomu, že technické zdroje mohou dodat jen omezené množství energie, může mít kauzální signál nenulové hodnoty jen do času t_0 . Pro čas $t \notin [t_0, t_b]$ je signál identicky roven nule. Takovýto signál se nazývá finitní - viz obr. 1.4.



Obr. 1.3



Obr. 1.4

Další třídu signálů tvoří signály periodické. Platí pro ně

$$s(t) = s(t + T_0) \quad T_0 > 0, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

tj. mají stejné hodnoty v okamžicích vzdálených od sebe o T_0 a jeho násobky. Velikost T_0 se nazývá perioda. Je třeba upozornit, že periodický signál není signálem finitním a nemůže tedy fyzikálně existovat. I přes tuto skutečnost s ním budeme dále, vzhledem k jednoduchosti, často pracovat. Rozdíl mezi teoretickými výsledky získanými pro periodické signály a skutečné signály, pro které $s(t) = s(t + T_0)$, $t \in \langle t_a, t_b \rangle$, bude z technického hlediska zanedbatelný, bude-li trvání signálu mnohonásobně delší než jeho perioda

$$t_b - t_a \gg T_0$$

a odezní-li všechny přechodové jevy vzniklé připojením tohoto signálu v čase $t = t_a$.

1.3 SINGULÁRNÍ SIGNÁLY. DIRACŮV IMPULS

Signály, které by měly nekonečně strmé přechody mezi hodnotami (tak jak tomu je např. na obr. 1.2), nemohou reálně existovat. Přesto jimi budeme reálné signály nahrazovat, protože se tak značně zjednoduší matematický zápis. Někdy se takovéto signály nazývají singulární [7].

1.3.1 Jednotkový skok

Jednotkový skok $\gamma(t)$ obr. 1.5 se definuje

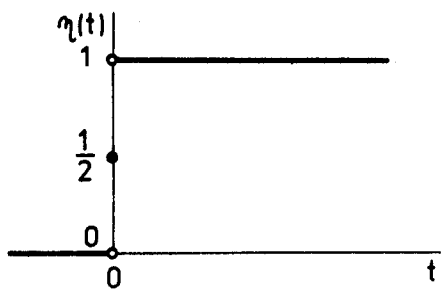
$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ 1 & , \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Jednotkového skoku můžeme použít k tomu, abychom ze signálu $s(t) \neq 0$, $t \in (-\infty, \infty)$ vytvořili kauzální signál $s_1(t)$, (obr. 1.6):

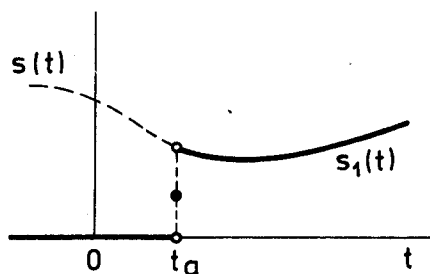
$$s_1(t) = s(t) \cdot \gamma(t - t_a). \quad (1.2)$$

Pomocí jednotkového skoku můžeme ze signálu $s(t) \neq 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ vytvořit finitní signál $s_2(t)$ (obr. 1.7):

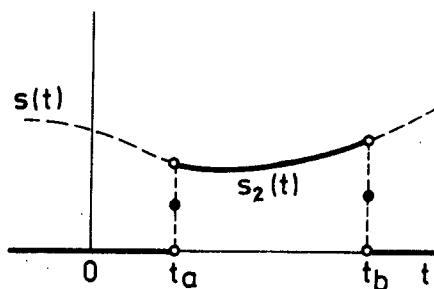
$$s_2(t) = [\gamma(t - t_a) - \gamma(t - t_b)] \cdot s(t) \quad (1.3)$$



Obr. 1.5



Obr. 1.6



Obr. 1.7

1.3.2 Přepínací (zmeménkový, komutační) signál

Přepínací signál definujeme (obr. 1.8)

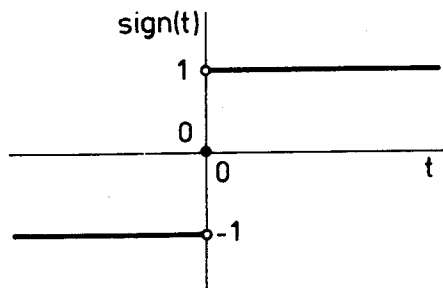
$$\text{sign}(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Lze ho vyjádřit pomocí jednotkového skoku (1.1)

$$\text{sign}(t) = 2u(t) - 1 \quad (1.5)$$

a naopak

$$u(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(t)] \quad (1.6)$$



Obr. 1.8

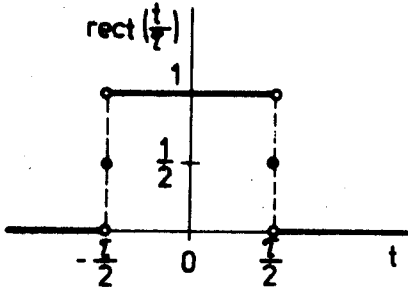
1.3.3 Obdélníkový impuls, jednotkový impuls

Signál vyjádřený hranatou závorkou v (1.3) se nazývá obdélníkový impuls (obr. 1.9)

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \eta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \eta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1.7)$$

Pokud budeme obdélníkový impuls zužovat, vznikne jednotkový impuls

$$u(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.8)$$



Obr. 1.9

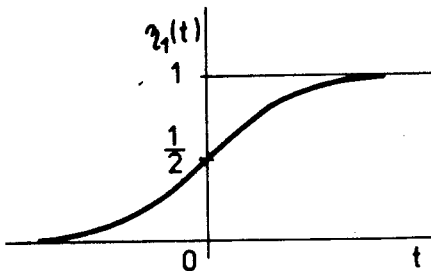
1.3.4 Diracův impuls

Výše uvedené singulární signály nejsou diferencovatelné ve všech bodech. Abychom tuto obtíž odstranili předpokládáme, že jsou limitními případy spojitých funkcí. Např. jednotkový skok je limitním případem funkce (obr. 1.10)

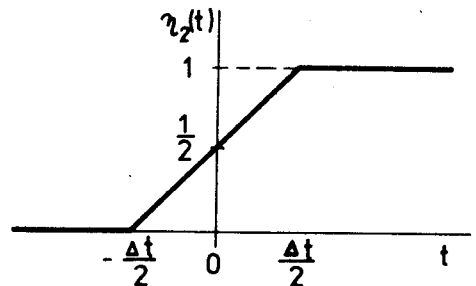
$$\eta_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{t}{\Delta t} \quad (1.9)$$

nebo (obr. 1.11)

$$\eta_2(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{\Delta t} & |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 1 & t > \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (1.10)$$



Obr. 1.10



Obr. 1.11

Pro $\Delta t \rightarrow 0$ přejdou funkce (1.9) a (1.10) v jednotkový skok

$$\eta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \eta_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \eta_2(t)$$

Derivace signálu $\eta_2(t)$, který je modelem jednotkového skoku, je (obr. 1.12)

$$\eta_2'(t) = \hat{\eta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & , |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & , \text{jinde} \end{cases} \quad (1.11)$$

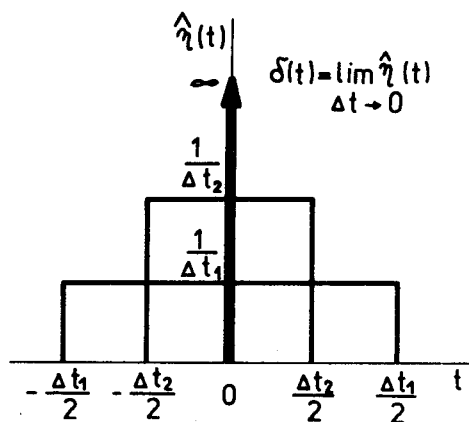
a nahrazujeme jí pro $\Delta t \rightarrow 0$ derivaci jednotkového skoku; nazýváme ji Diracovým impulsem a označujeme

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{\eta}(t) \quad (1.12)$$

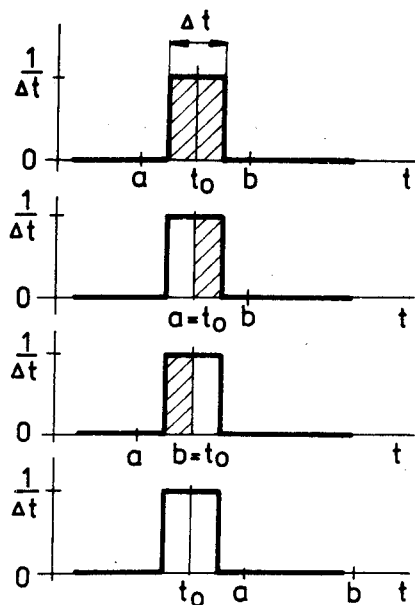
Na základě uvedeného přechodu můžeme (viz obr. 1.13) odvodit základní vlastnost Diracova impulsu

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_a^b \hat{\eta}(t) dt =$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} dt &= 1, & a < t_0 < b \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} dt &= \frac{1}{2}, & a = t_0 < b \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0} dt &= \frac{1}{2}, & a < t_0 = b \\ 0 & & , t_0 \notin (a, b) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$



Obr. 1.12



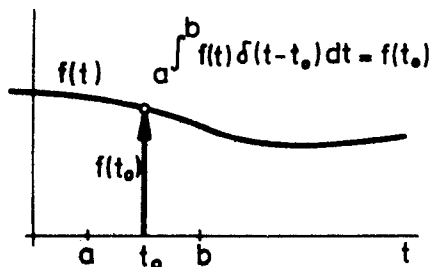
Obr. 1.13

Diracův impuls je tedy často spojován s představou nekonečně úzkého a nekonečně vysokého impulsu, jehož plocha je jednotková.

Diracův impuls má tzv. vzorkovací vlastnost. Je-li funkce $f(t)$ spojitá na intervalu (a, b) , platí při $t_0 \in (a, b)$

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (1.14)$$

tj. integrál z funkce $f(t)$ násobené Diracovým impulsem posunutým do bodu t_0 je roven hodnotě funkce v bodě t_0 . Tento výsledek se snadno zapamatuje, uvážíme-li, že plocha Diracova impulsu je jednotková. Podle (1.14) impuls vážíme hodnotou funkce v bodě t_0 (obr. 1.14) a jeho plocha musí být $f(t_0)$ krát větší. Přesněji můžeme psát



Obr. 1.14

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} f(t) dt.$$

Na základě věty o střední hodnotě můžeme tento výraz přepsat

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t \cdot f(c),$$

$$\text{kde } c \in \left(t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

a to při $\Delta t \rightarrow 0$ dá $f(t_0)$.

Poznamenejme, že Diracův impuls se někdy nesprávně nazývá Diracovou funkcí, δ - funkcí aj. Nesprávnost spočívá v tom, že integrál z funkce, která v jediném bodě roste nade všechny meze a jinde je nulová, je nulový. Tento nesouhlas s (1.13) je dán nekorektností zavedení limity a integrálu, které je přípustné u tzv. distribucí. Velmi nepřesně řečeno bylo zavedení distribucí dáno požadavkem derivovat integrovatelnou funkci v bodě, kde není spojitá. Derivování bylo umožněno uskutečněním uvedeného limitního přechodu - funkce je derivovatelná ve smyslu distributivním. Distribuce se vyznačuje tím, že funkcionál

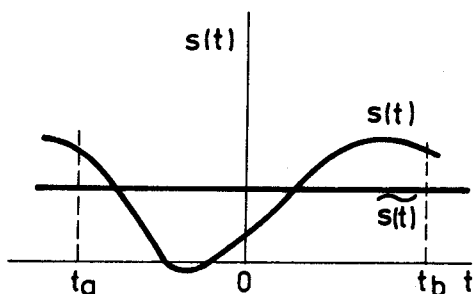
$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

V našem případě je funkcionálem integrál podle výrazu (1.14), kterým se někdy Diracův impuls, správněji Diracova distribuce zavádí.

1.4 STŘEDNÍ HODNOTA V ČASE, VÝKON A ENERGIE SIGNÁLU

Střední hodnota v čase signálu $s(t)$ je (za časový interval $t_a < t < t_b$) dána vztahem

$$\widetilde{s(t)} = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} s(t) dt \quad (1.15)$$



Obr. 1.15

Střední hodnota $\widetilde{s(t)}$ je konstantní signál, kterým nahradíme proměnný signál, $s(t)$ tak, aby plochy pod oběma signály byly stejné (obr. 1.15). Operaci střední hodnoty budeme značit vlnovkou.

Pokud délka signálu roste nade všechny meze, definujeme střední hodnotu jako

$$\widetilde{s(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) dt. \quad (1.16)$$

Okamžitý výkon signálu definujeme

$$p(t) = |s(t)|^2. \quad (1.17)$$

Okamžitou energii signálu definujeme pomocí okamžitého výkonu (1.17) [4]

$$e(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt, \quad (1.18)$$

příp. energii za časový interval $t_a < t < t_b$

$$E = \int_{t_a}^{t_b} p(t) dt = \int_{t_a}^{t_b} |s(t)|^2 dt. \quad (1.19)$$

U finitních signálů existuje integrál definující jejich celkovou energii (dále jen energii)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (1.20)$$

Střední výkon (dále jen výkon) je energie připadající na jednotku času, tj.

$$P = \widetilde{p(t)} = |\widetilde{s(t)}|^2 = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} p(t) dt = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} |s(t)|^2 dt \quad (1.21)$$

a pokud délka signálu roste nade všechny meze, je

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt. \quad (1.22)$$

Finitní signály mají podle (1.20) nenulovou konečnou energii, ale nulový výkon podle (1.22). Takovým signálům se někdy říká signály energetické [4]. U signálů s konečným výkonem podle (1.22) roste energie nade všechny meze (např. periodický sinusový signál). Takovým signálům se někdy říká signály výkonové.

U signálů definujeme efektivní hodnotu

$$S_{\text{ef}} = \sqrt{P} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt} \quad (1.23)$$

tj. velikost konstantního signálu, který má stejný (střední) výkon jako signál $s(t)$.

1.5 VZÁJEMNÝ VÝKON A VZÁJEMNÁ ENERGIE. ORTOGONÁLNÍ SIGNÁLY

Všimněme si nyní výkonu součtu reálných signálů. Např. pro dva signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ není okamžitý výkon jejich součtu roven součtu okamžitých výkonů tj.

$$[s_1(t) + s_2(t)]^2 \neq [s_1(t)]^2 + [s_2(t)]^2. \quad (1.24)$$

Říkáme, že okamžitý výkon není aditivní.

Naproti tomu pro střední výkon součtu signálů můžeme psát

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \\ &= \frac{1}{t_b - t_a} \left[\int_{t_a}^{t_b} s_1^2(t) dt + \int_{t_a}^{t_b} s_2^2(t) dt + 2 \int_{t_a}^{t_b} s_1(t) s_2(t) dt \right] = \\ &= P_1 + P_2 + 2 P_{12} \end{aligned} \quad (1.25)$$

kde P_1, P_2 jsou střední výkony a P_{12} je tzv. vzájemný výkon signálů $s_1(t), s_2(t)$.

$$P_{12} = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} s_1(t) s_2(t) dt \quad (1.26)$$

Jestliže signály $s_1(t), s_2(t)$ jsou takové, že vzájemný výkon je nulový, tj. $P_{12} = 0$, je střední výkon součtu signálů aditivní, tj. je roven součtu středních výkonů

$$P = P_1 + P_2.$$

Signály, jejichž vzájemný výkon je nulový, nazýváme ortogonální podle výkonu.

Podobně jako ve vztahu (1.25) můžeme určit energii součtu dvou signálů

$$E = \int_{t_a}^{t_b} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = E_1 + E_2 + 2E_{12},$$

kde E_1, E_2 jsou energie a E_{12} je vzájemná energie signálů $s_1(t), s_2(t)$

$$E_{12} = \int_{t_a}^{t_b} s_1(t) s_2(t) dt . \quad (1.27)$$

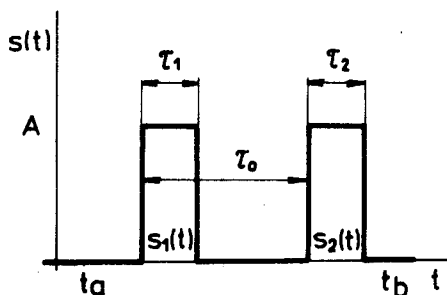
Jestliže $E_{12} = 0$, nazýváme signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ ortogonální podle energie. V tomto případě je energie součtu signálů aditivní.

Interval (t_a, t_b) , na němž je vzájemný výkon, příp. vzájemná energie nulová, se nazývá intervalem ortogonalit.

Pokud je délka intervalu ortogonalit konečná, jsou signály ortogonální podle výkonu ortogonální i podle energie. Jestliže však délka intervalu ortogonalit roste nade všechny meze, může být vzájemný výkon (1.26) nulový proto, že je nulový zlomek před integrálem. Vzájemná energie v takovém případě nulová být nemusí. Z uvedeného plyne, že z ortogonalit podle energie plyne ortogonalita podle výkonu. Opačná implikace neplatí.

Jako příklad ortogonálních signálů uveďme dva obdélníkové impulsy podle obr. 1.16. Ortogonální jsou také signály $s_1(t) = \cos t$ a $s_2(t) = \sin t$

Ponecháme na čtenáři, aby si tuto skutečnost sám ověřil.



Obr. 1.16

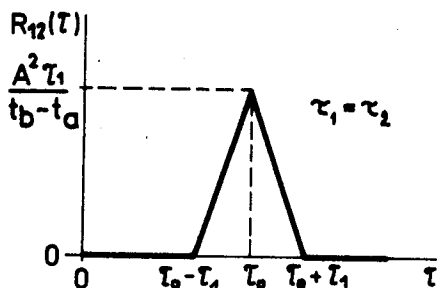
1.6 KORELAČNÍ FUNKCE

Jak jsme uvedli v předchozím odstavci, mají ortogonální signály nulový vzájemný výkon a výkon jejich součtu je roven součtu výkonů. Jsou-li signály totožné, $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, nejsou ortogonální, jejich vzájemný výkon je roven výkonu každého z nich a výkon součtu je roven čtyřnásobku výkonu každého signálu. Ortogonalitu signálů proto obvykle spojujeme s představou jejich nepodobnosti či nezávislosti, vzájemný výkon je pak veličinou, podle níž můžeme soudit na velikost závislosti obou signálů.

Nulový vzájemný výkon mají např. i signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ podle obr. 1.16, ačkoli mají stejný průběh a jejich "nezávislost" spočívá jen v tom, že jsou vzájemně posunuté. Tento nedostatek odstraníme tak, že ve vztahu (1.26) nahradíme $s_2(t)$ posunutým signálem $s_2(t + \tau)$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} s_1(t) s_2(t + \tau) dt . \quad (1.28)$$

Měníme-li τ tak, že se signály v obr. 1.16 začínají překrývat, je $R_{12}(\tau)$ nenulové. Pro $\tau = \tau_0$ se signály překryjí a $R_{12}(\tau)$ nabývá max. hodnoty. Při dalším zvětšování τ se hodnota $R_{12}(\tau)$ zmenšuje k nule. Funkci $R_{12}(\tau)$ podle (1.28) nazýváme korelační funkce (korelace - původem latinské slovo - znamená vzájemný vztah, souvislost). Její průběh pro signály podle obr. 1.16 je na obr. 1.17. O signálech, pro které $R_{12}(\tau) = 0$ pro všechna τ , mluvíme jako o signálech nekorelovaných.



Obr. 1.17

Můžeme také sledovat závislost hodnot vzdálených o τ u jednoho a téhož signálu. Vztah (1.28) přejde na

$$R(\tau) = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} s(t) s(t + \tau) dt$$

(1.29)

Tuto funkci nazýváme autokorelační funkce. Abychom zdůraznili rozdíl mezi funkcemi (1.28) a (1.29), nazýváme $R_{12}(\tau)$ podle (1.28) vzájemně korelační funkce.

V případě, že délka intervalu $\langle t_a, t_b \rangle$ roste nade všechny meze, definujeme vzájemnou korelační funkci signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$ jako

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

(1.30)

a autokorelační funkci

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) s(t + \tau) dt$$

(1.31)

Vztahy (1.30) a (1.31) mají smysl u signálů výkonových (viz kap. 1.4).

U energetických signálů se na nekonečném intervalu definují korelační funkce

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt,$$

(1.32)

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s(t + \tau) dt.$$

(1.33)

Pořadí signálů v (1.30) a (1.32) není libovolné. Snadno se lze přesvědčit, že

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$$

(1.34)

Naproti tomu substitucí $t + \tau = z$ v (1.31) získáme jiný často užívaný vztah pro autokorelační funkci

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) s(t - \tau) dt \quad (1.35)$$

Z porovnání (1.31) a (1.35) plyne, že autokorelační funkce je sudou funkcí τ .

$$R(-\tau) = R(\tau) \quad (1.36)$$

1.7 KONVOLUCE

Konvolucí nazýváme operaci se signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ podle předpisu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$$

Je funkcí t a budeme ji označovat

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \quad (1.37)$$

V anglosaské literatuře se často značí $s_1 * s_2(t)$, případně jen $s_1 * s_2$.

Přímo z definice konvoluce lze dokázat, že je

a) komutativní, tj.

$$s_1(t) * s_2(t) = s_2(t) * s_1(t) \quad (1.38)$$

b) distributivní, tj.

$$s_1(t) * [s_2(t) + s_3(t)] = s_1(t) * s_2(t) + s_1(t) * s_3(t) \quad (1.39)$$

c) asociativní, tj.

$$s_1(t) * [s_2(t) * s_3(t)] = [s_1(t) * s_2(t)] * s_3(t) \quad (1.40)$$

Často se vyskytuje konvoluce signálu a Diracova impulsu.

Podle (1.14) dostaneme

$$s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = s(t) \quad (1.41)$$

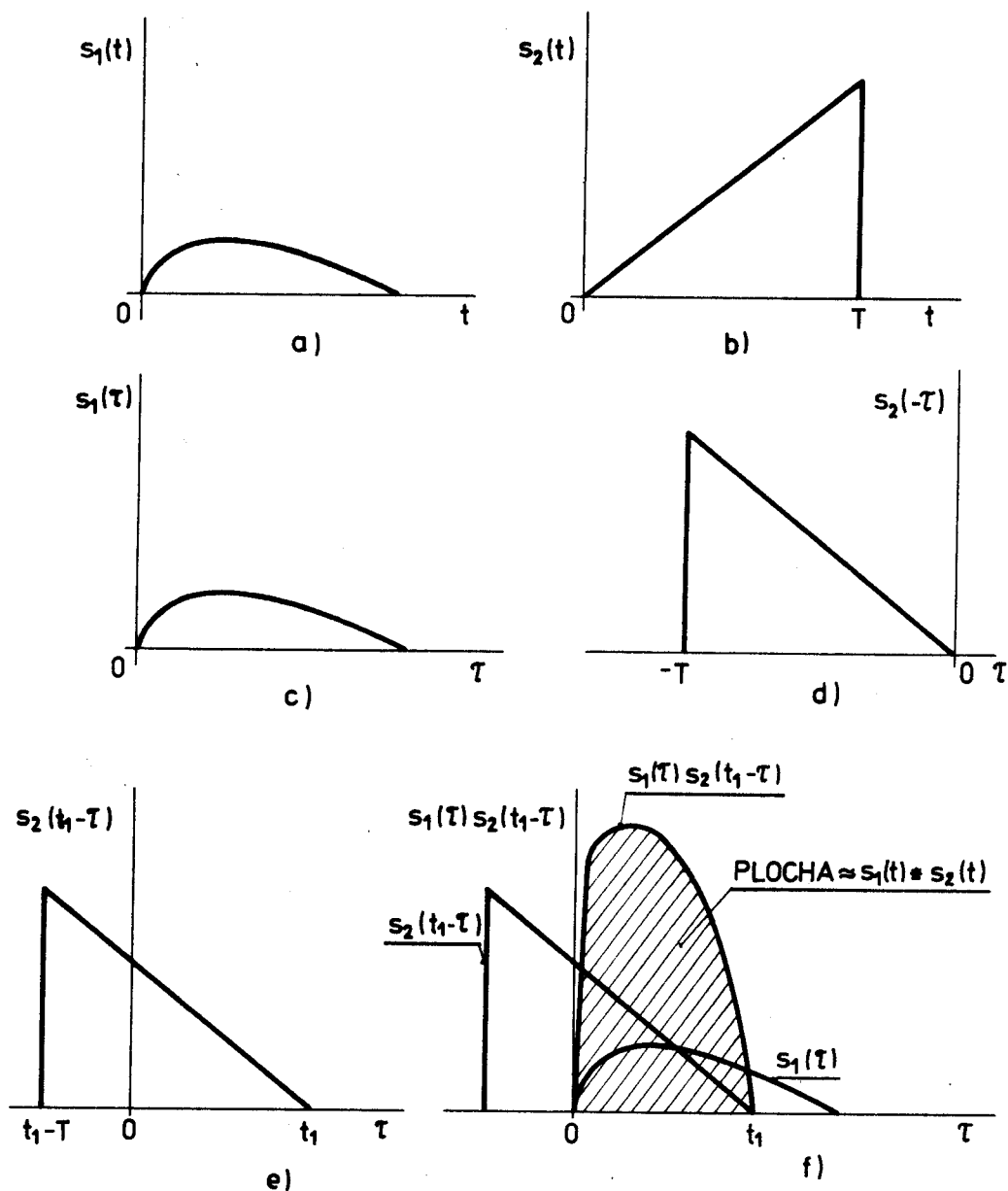
Podobně odvodíme často užívané vztahy

$$s(t) * \delta(t - t_1) = s(t - t_1) \quad (1.42)$$

$$s(t - t_1) * \delta(t - t_2) = s(t - t_1 - t_2) \quad (1.43)$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \quad (1.44)$$

Konvoluce se někdy interpretuje graficky. Postup ukažme na konvoluci signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$ podle obr. 1.18a, b. Oba signály převedeme na funkce proměnné τ , signál s_2 obrátíme podle vvislé souřadné osy, čímž realizujeme signál $s_2(-\tau)$. Jeho posunem o t_1 vlevo získáme signál $s_2(t_1 - \tau)$ pro $t = t_1$ (obr. 1.18e). Vynásobíme spolu hodnoty $s_1(\tau)$ a $s_2(t_1 - \tau)$ pro různá τ . Získáme tak křivku $s_1(\tau) s_2(t_1 - \tau)$. Plocha pod touto křivkou odpovídá konvoluci pro $t = t_1$, tj. $s_1(t_1) * s_2(t_1)$ (obr. 1.18f).



obr. 1.18

Pomocí konvoluce lze vyjádřit vzájemnou korelační funkci energetických signálů (1.32) jako

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1[-(\tau-x)] s_2(x) dx$$

$$R_{12}(\tau) = s_1(-\tau) * s_2(\tau) \quad (1.45)$$

Podobně pro autokorelační funkci (1.33) je

$$R(\tau) = s(\tau) * s(-\tau) \quad (1.46)$$

2. PERIODICKÉ SIGNÁLY A JEJICH SPEKTRUM

Determinovaný signál $s(t)$ je periodický, jestliže existuje takové $T_0 > 0$, že platí $s(t) = s(t + T_0) = s(t + kT_0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pro všechna t . Minimální $T_0 > 0$ se nazývá perioda signálu.

Součet, rozdíl, součin a podíl periodických signálů s periodou T_0 je opět periodický signál s periodou T_0 .

Máme-li dva signály $s_1(t)$ s periodou T_1 a $s_2(t)$ s periodou T_2 , přičemž T_1/T_2 je racionální číslo, pak existují taková nesoudělná celá a od nuly různá čísla k_1 a k_2 , že $k_1 T_1 = k_2 T_2$ a součtový signál $s_1(t) + s_2(t)$ je periodický s periodou $k_1 T_1 = k_2 T_2$.

Konstantní signál splňuje rovněž výše uvedenou podmínku a považujeme ho proto za periodický signál. Periodu u něj nevyjadřujeme.

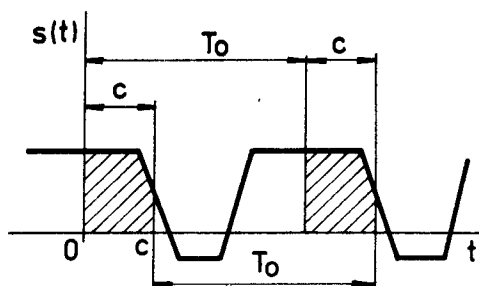
Určitý integrál periodického signálu se nezmění, posuneme-li jeho meze o periodu

$$\int_0^c s(t) dt = \int_{T_0}^{T_0+c} s(t) dt. \quad (2.1)$$

Z toho lze snadno odvodit, že určitý integrál periodického signálu v mezích lišících se o periodu nezávisí na volbě dolní integrační meze, tj.

$$\int_0^{T_0} s(t) dt = \int_c^{c+T_0} s(t) dt \quad (2.2)$$

pro každé c (viz obr. 2.1)



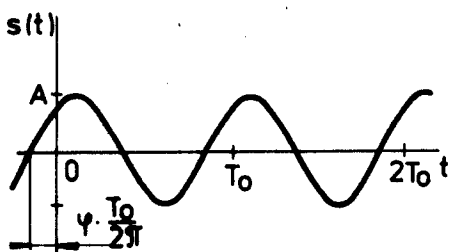
Obr. 2.1

2.1 HARMONICKÉ SIGNÁLY

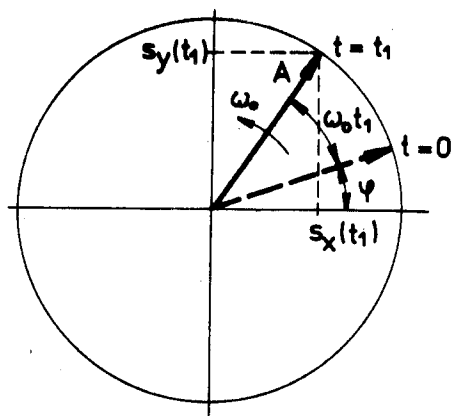
Harmonické signály jsou periodické signály odvozené od nejjednoduššího přírodního kmitavého pohybu. V závislosti na čase mají sinusový příp. kosinusový průběh (obr. 2.2).

Je užitečné zavést je jako složky vektoru délky A rotujícího v komplexní rovině (obr. 2.3). Vektor svírá v čase $t = 0$ s kladnou reálnou poloosou úhel φ a za jednotku času se pootočí o úhel ω_0 . Rotující vektor můžeme vyjádřit

$$\dot{s}(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = A [\cos(\omega_0 t + \varphi) + j \sin(\omega_0 t + \varphi)] \quad (2.3)$$



Obr. 2.2



Obr. 2.3

a jeho složky jsou

$$s_x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Re} [\dot{s}(t)] \quad (2.4)$$

a

$$s_y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Im} [\dot{s}(t)] \quad (2.5)$$

Délka vektoru A udává amplitudu. Úhel, který vektor svírá s kladnou reálnou poloosou je fáze harmonického signálu. Úhel φ , který vektor svírá s kladnou reálnou poloosou v čase $t = 0$ je tzv. počáteční fáze. Úhel ω_0 , o který se vektor pootočí za jednotku času, nazýváme úhlový kmitočet.

Za jednu periodu T_0 se musí vektor otočit o 2π , tj.

$$\omega_0 \cdot T_0 = 2\pi$$

Uvážíme-li, že kmitočet, tj. počet otáček vektoru za 1 sekundu, je

$$f_0 = \frac{1}{T_0},$$

dostaneme pro úhlový kmitočet

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0. \quad (2.6)$$

Harmonický signál (2.4) můžeme vyjádřit v časové oblasti, tj. zapsat ho jako funkci času

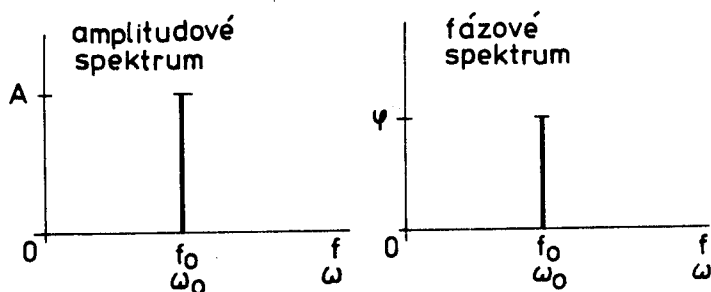
$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Re} [A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}] = \operatorname{Re} [A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t}], \quad (2.7)$$

příp. graficky znázornit jeho průběh v závislosti na čase (např. obr. 2.2). Můžeme ho však vyjádřit také v kmitočtové oblasti, tj. udat hodnotu amplitudy A a fáze φ pro daný kmitočet f_0 (příp. úhlový kmitočet ω_0). O závislosti amplitudy na kmitočtu mluvíme jako o amplitudovém spektru. Závislost fáze na kmitočtu udává fázové spektrum (obr. 2.4).

Vyjádření signálu v časové oblasti je ekvivalentní vyjádření v kmitočtové oblasti.

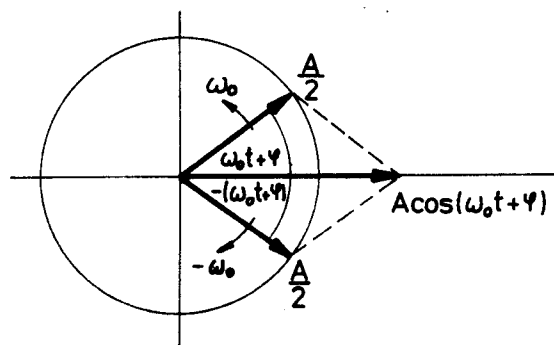
Harmonický signál můžeme také vyjádřit pomocí tzv. sdrúžených rotujících vektorů. Můžeme psát

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t} \quad (2.8)$$



Obr. 2.4

Na pravé straně (2.8) vystupují dva komplexně sdružené výrazy, které můžeme znázornit dvěma komplexně sdruženými rotujícími vektory (obr. 2.5).

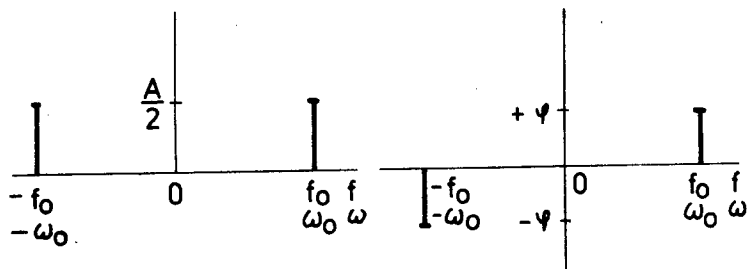


Obr. 2.5

Ve výrazu (2.8) a v obr. 2.5 se vyskytuje nejen kmitočet $f_0 (\omega_0)$, ale také kmitočet $-f_0 (-\omega_0)$.

Dostáváme tzv. dvoustranné spektrum (obr. 2.6).

Povšimněme si toho, že u dvoustranného amplitudového spektra je délka spektrálních čar rovna polovině amplitudy.



Obr. 2.6

2.2 SOUČET HARMONICKÝCH SIGNÁLŮ

Harmonický signál podle (2.4) můžeme přepsat

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A (\cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi) = \\ &= a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.9)$$

tj. fázově posunutý harmonický signál je složen ze sinusového a kosinusového signálu. Jejich amplitudy jsou

$$\begin{aligned} a &= A \cdot \cos \varphi, \\ b &= -A \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Z (2.10) můžeme určit amplitudu a fázový posun signálu (2.4)

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2.11)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{b}{a}. \quad (2.12)$$

Vytvořme nyní posloupnost harmonických signálů

$$s_k(t) = a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.13)$$

jejichž úhlové kmitočty jsou k -násobkem úhlového kmitočtu ω_0 .

Tzn. že perioda signálu $s_k(t)$ je k -krát kratší než T_0

$$T_k = \frac{T_0}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.14)$$

T_0 je periodou (nikoli nejmenší) všech signálů $s_k(t)$, protože

$$s_k(t) = s_k(t + T_k) = s_k(t + k \cdot T_k) = s_k(t + T_0).$$

Podle toho, co jsme uvedli na začátku kapitoly 2, je součet

$$\sum_{k=1}^n (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t)$$

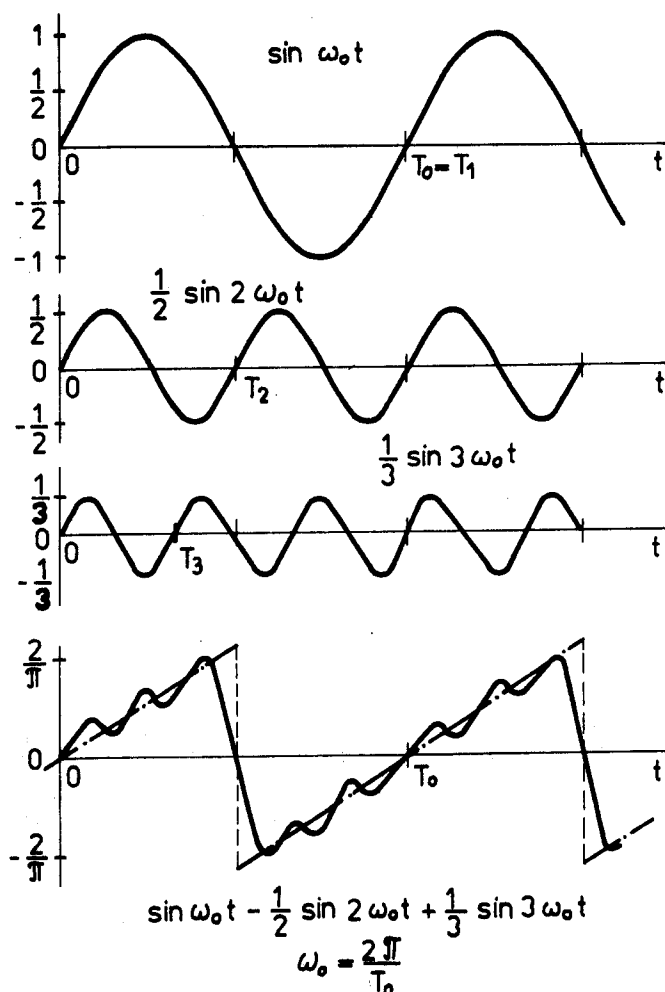
periodickým signálem s periodou T_0 . Protože konstantní signál je také signálem periodickým s periodou T_0 , je periodický i signál

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t). \quad (2.15)$$

Výraz (2.15) může i pro malé n dát signál podstatně odlišný od signálu harmonického. Jako příklad uveďme signál

$$s(t) = \sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t,$$

který se blíží pilovitému signálu (obr. 2.7).



Obr. 2.7

2.3 FOURIEROVY ŘADY

V předchozí kapitole jsme ukázali, že trigonometrický mnohočlen řádu n (2.15) může představovat periodický signál, značně se lišící od harmonického. Perioda tohoto signálu

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

odpovídá periodě členů mnohočlenu pro $k = 1$.

Nabízejí se dvě otázky:

- 1) zda je možné libovolný periodický signál vyjádřit trigonometrickým mnohočlenem (2.15),
- 2) je-li vyjádření možné, jak se vypočítají koeficienty a_k , b_k .

2.3.1 Trigonometrická Fourierova řada

Řešme nejprve druhou otázku. Předpokládejme, že řada (2.15) konverguje

pro $n \rightarrow \infty$ k periodickému signálu $s(t)$ (s periodou $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$), a můžeme napsat rovnost

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t) \quad (2.16)$$

Pro jednoduchost převedeme $s(t)$ substitucí $\omega_0 t = x$ na signál s periodou 2π .

$$s\left(\frac{x}{\omega_0}\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2.16a)$$

Pro integrály trigonometrických funkcí platí, je-li n, m celé

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \, dx = 0 \quad (2.17a)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad (2.17b)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} \pi & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases} \quad (2.17c)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases} \quad (2.17d)$$

Řadu (2.16a) integrujeme člen po členu a použijeme (2.17a). Dostaneme

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \, dx) = a_0 \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx \quad (2.18a)$$

Jestliže (2.16a) násobíme $\cos nx$, integrujeme člen po členu a použijeme (2.17a), (2.17b), (2.17c), dostaneme

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos nx \, dx) = a_n \cdot \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (2.18b)$$

Podobně (2.16a) násobíme $\sin nx$, integrujeme člen po členu a použijeme (2.17a), (2.17b), (2.17d) a dostaneme

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin nx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin nx \, dx) = b_n \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (2.18c)$$

Vztahy (2.18a), (2.18b), (2.18c) použijeme pro výpočet koeficientů harmonických složek, jejichž součtem nahradíme periodický signál $f(x)$ s periodou

$$T_0 = 2\pi.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Substitucí $\omega_0 t = x$ dostaneme vztahy pro koeficienty harmonických složek, jejichž součtem nahradíme periodický signál $s(t)$ s periodou T_0 (2.16):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t),$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) dt, \quad (2.19a)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \cos n \omega_0 t dt, \quad (2.19b)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \sin n \omega_0 t dt. \quad (2.19c)$$

Podle (1.15) odpovídá koeficient a_0 dvojnásobku střední hodnoty signálu, tedy dvojnásobku stejnosměrné složky signálu. Proto je v (2.16) člen $a_0/2$.

Vztahy (2.18), (2.19) se nazývají Euler-Fourierovy vzorce. Trigonometrické řadě vpravo od rovnítko výrazu (2.16), s koeficienty podle Euler-Fourierových vzorců, říkáme (trigonometrická) Fourierova řada signálu $s(t)$.

Zabýváme se nyní prvou z otázek uvedených na začátku této kapitoly - zda součet řady (2.16) existuje a jak tento součet souvisí se signálem $s(t)$. V obecném případě není odpověď na otázku konvergence Fourierovy řady jednoduchá a v plné šíři není dosud známa [11]. V literatuře se uvádí celá řada kritérií pro konvergenci (např. [9]). Problém se zjednoduší v případě reálných, v technické praxi existujících signálů, které mají konečnou energii (1.19), tj. z matematického hlediska jsou integrovatelné s kvadrátem [12]. Nemají ani nekonečně strmé změny hodnot, což problém konvergence Fourierovy řady dále zjednodušuje. Na druhé straně matematické vyjádření např. sledu obdélníkových impulsů, které ve skutečnosti mají lichoběžníkový průběh, je neobyčejně těžkopádné a je proto vhodnější je nahradit funkcí (např. 1. 7)), která vykazuje některé singularity, avšak usnadní zápis. Proto zde uvedeme jen jednoduché postačující podmínky konvergence Fourierovy řady, vyhovující ve většině případů technické praxe.

Abychom odlišili Fourierovu řadu od signálu $s(t)$ (ve výrazu (2.16) by nemělo být rovnítko), označme ji

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) \quad (2.20)$$

Platí následující věta o konvergenci v bodě [11]:

Je-li $s(t)$ periodický signál, který je na intervalu periodicity $(0, T_0)$ funkcí po úsecích hladkou, konverguje jeho Fourierova řada všude:

a) v bodech, kde je $s(t)$ spojitá funkce, je $\xi(t) = s(t)$

b) v bodech nespojitosti t_i uvnitř intervalu periodicity je součet Fourierovy řady

$$\xi(t_i) = \frac{1}{2} [s(t_i + 0) + s(t_i - 0)] \quad (2.21)$$

c) v bodech $t = kT_0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je součet

$$\xi(kT_0) = \frac{1}{2} [s(0+) + s(T_0 - 0)]$$

Připomeňme, že funkce je po úsecích hladká v intervalu, je-li v tomto intervalu po úsecích spojitá a je-li po úsecích spojitá i její prvá derivace.

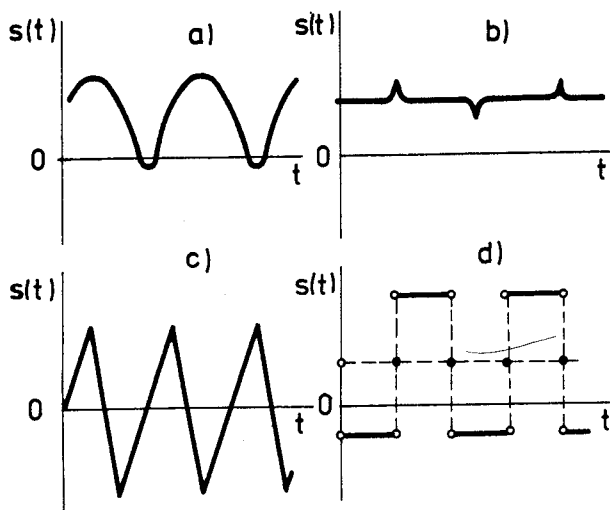
Funkce po úsecích spojitá v intervalu (a, b) je spojitá ve všech bodech intervalu (a, b) kromě konečného počtu bodů $t_k, k = 1, 2, \dots, n$, ve kterých má nespojitosti prvního druhu.

Funkce je spojitá v bodě, je-li v něm definovaná a je-li limita v tomto bodě rovna funkční hodnotě.

Funkce $f(x)$ má v bodě c nespojitost prvního druhu, existuje-li v c konečná limita zprava $f(c+0)$ i zleva $f(c-0)$ a $f(c+0) \neq f(c-0)$.

Rozdíl $f(c+0) - f(c-0)$ nazýváme skokem funkce.

Na obr. 2.8 jsou příklady signálů, pro které existuje Fourierova řada. U signálů, které mají skok, odpovídá součet řady, jak jsme uvedli, polovině skoku (obr. 2.8d).



Obr. 2.8

2.3.2 Komplexní Fourierova řada

Protože

$$a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t =$$

$$= a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} =$$

$$= \frac{1}{2} [(a_n - jb_n) e^{jn\omega t}] + \frac{1}{2} [(a_n + jb_n) e^{-jn\omega t}] ,$$

můžeme Fourierovu řadu přepsat

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right) .$$

Označíme

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.22)$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (2.23)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_n^* \quad (2.24)$$

a pro Fourierovu řadu signálu $s(t)$ můžeme psát

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} , \quad (2.25)$$

přičemž koeficienty c_n dostaneme z (2.23) po dosazení (2.19b) a (2.19c)

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cos n\omega_0 t \, dt - j \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \sin n\omega_0 t \, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) [\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t] \, dt ,$$

tj.

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt . \quad (2.26)$$

Čtenář si sám ověří, že výraz (2.26) vyhovuje i pro nulové a záporné n .

Je třeba zdůraznit, že komplexní Fourierova řada je jen jiným zveřejněním Fourierovy trigonometrické řady (2.20). Součet $\xi(t)$ Fourierovy řady (2.25) s koeficienty (2.26) proto konverguje k signálu $s(t)$ podle věty uvedené v odstavci (2.3.1).

2.3.3 Fyzikální interpretace koeficientů Fourierovy řady

Je-li splněny požadavky věty v kap. 2.3.1, konverguje součet $\xi(t)$ Fourierovy řady k signálu $s(t)$. Často se píše přímo rovnost

$$s(t) = \xi(t) ;$$

u periodických signálů skutečně existujících (s výhradou, že jsou finitní) rov-

nost platí, u signálů s nespojitostmi prvního druhu je třeba ji chápat jako konvergenci.

Fourierovou řadou rozkládáme signál na součet nekonečně mnoha harmonických složek

$$A_k \cos(k \omega_0 t + \psi_k) = A_k \cos(2\pi k f_0 t + \psi_k).$$

Někdy říkáme, že provádíme harmonickou analýzu. Složka s nejnižším kmitočtem rovným kmitočtu signálu se nazývá první (základní) harmonická (složka). Další složky mají kmitočty, které jsou celistvým násobkem kmitočtu první harmonické a nazýváme je vyššími harmonickými (druhou, třetí, ...) (složkami).

Amplitudy harmonických složek můžeme určit jak z koeficientů trigonometrické, tak z koeficientů komplexní Fourierovy řady.

1) Z koeficientů a_n, b_n trigonometrické Fourierovy řady určíme amplitudu n -té harmonické podle (2.11)

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (2.27)$$

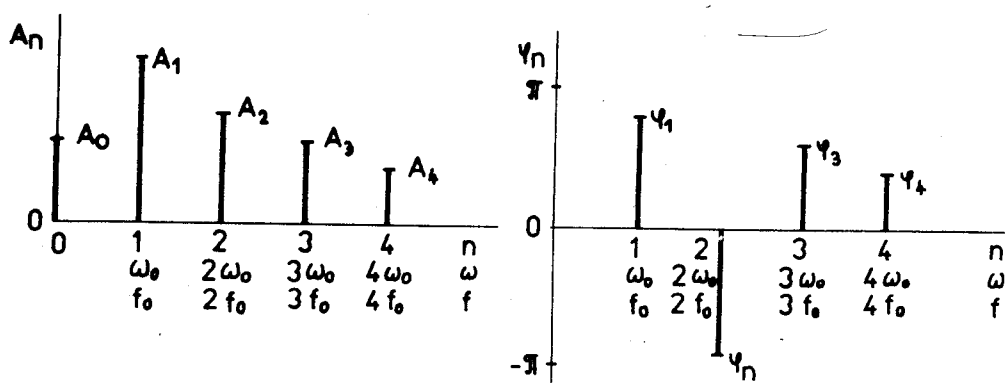
Velikost stejnosměrné složky je, jak jsme již uvedli,

$$A_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (2.28)$$

Fázový posun ψ_n n -té složky určíme podle (2.12)

$$\psi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}. \quad (2.29)$$

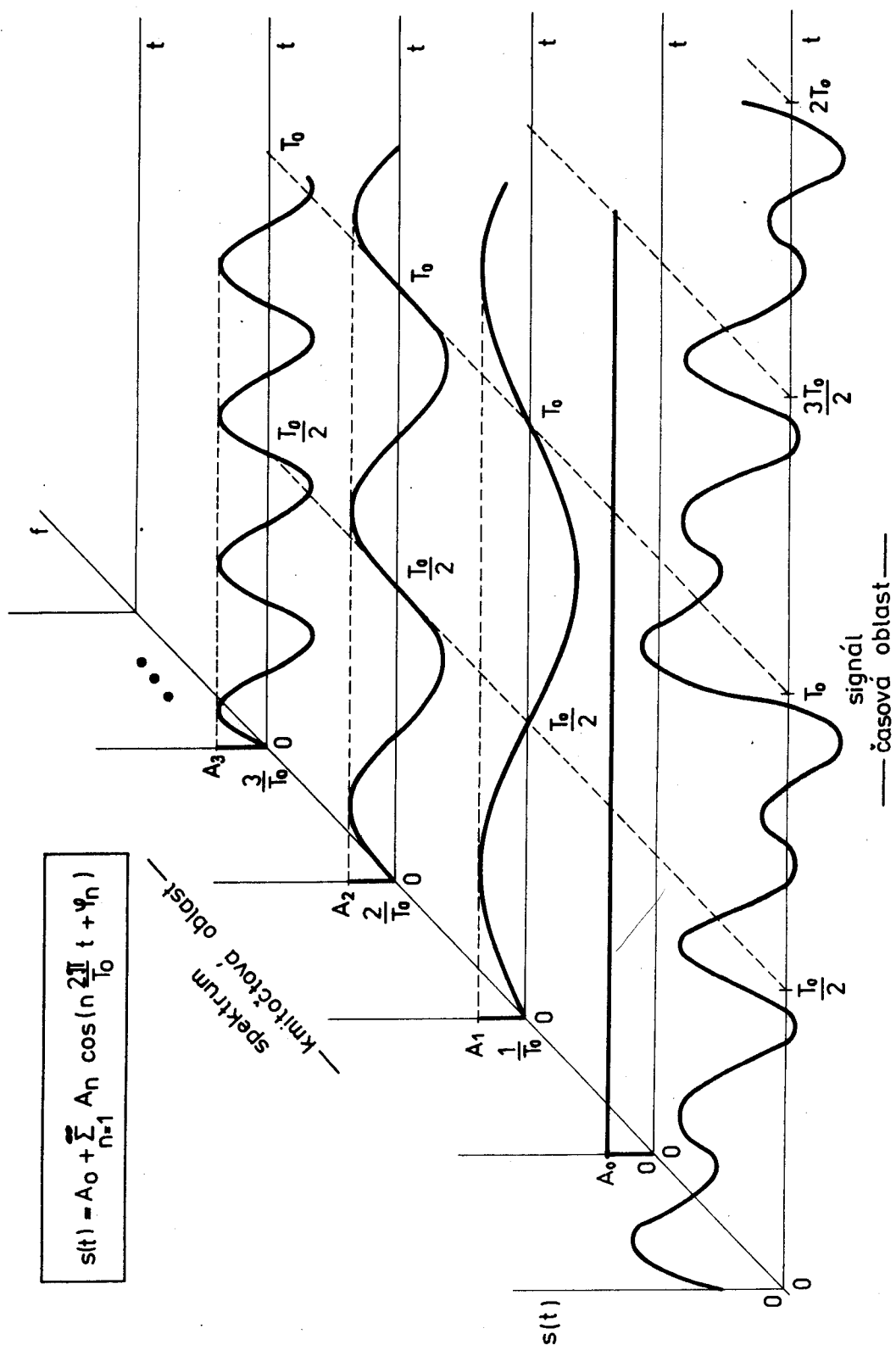
Soubor amplitud $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ a fází $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ představuje amplitudové, příp. fázové (jednostranné) spektrum (obr. 2.9, viz též obr. 2.4). Obě spektra představují vyjádření signálu v kmitočtové oblasti, které je ekvivalentní vyjádření v oblasti časové (obr. 2.10).



Obr. 2.9

2) Z koeficientů C_n komplexní Fourierovy řady určíme jednostranné spektrum snáze. Podle (2.22)

$$A_0 = C_0 \quad (2.30)$$



Obr. 2.10

Z (2.23) je

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.31)$$

a po dosazení do (2.27) dostaneme

$$A_n = 2 |c_n|. \quad (2.32)$$

Protože

$$a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n),$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n),$$

je podle (2.29)

$$\psi_n = + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{Im}(c_n)}{\operatorname{Re}(c_n)} = \arg c_n. \quad (2.33)$$

Častěji však koeficienty komplexní Fourierovy řady zobrazujeme jako dvoustranné spektrum (srovnej s obr. 2.6), tj. pro kladná i záporná n , tedy pro kladné i záporné kmitočty. Koeficienty c_n a c_{-n} jsou komplexně sdružené (viz 2.24) a výrazy

$$c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{a} \quad c_{-n} e^{-jn\omega_0 t},$$

které vystupují ve (2.25) pro $n = 1, 2, \dots$ odpovídají dvěma proti sobě rotujícím vektorům podle obr. 2.5, jejichž vektorový součet dává n -tou harmonickou složku:

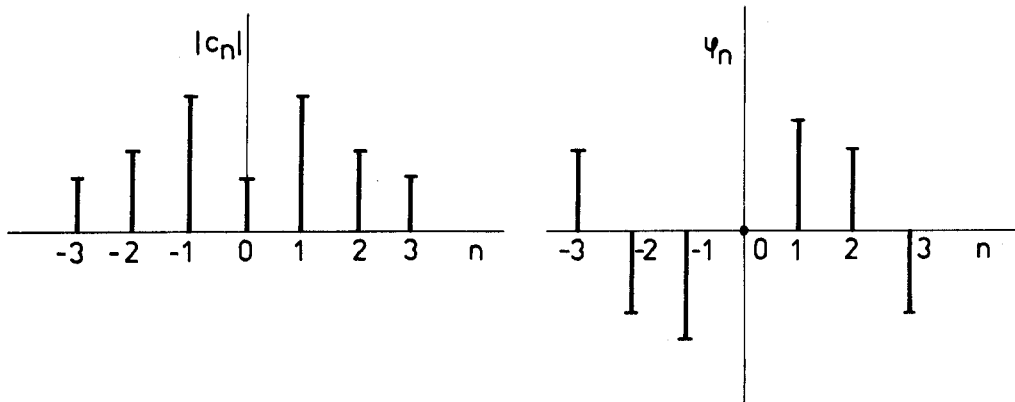
$$\begin{aligned} c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} &= c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \\ &= |c_n| \cdot e^{j\psi_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} + |c_n| e^{-j\psi_n} e^{-jn\omega_0 t} = \\ &= |c_n| (e^{j(n\omega_0 t + \psi_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \psi_n)}) = 2 |c_n| \cos(n\omega_0 t + \psi_n) = \\ &= A_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n). \end{aligned}$$

Jako dvoustranné amplitudové spektrum se vynášejí hodnoty $|c_n|$, jako fázové spektrum $\arg c_n$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ (obr. 2.11). Dvoustranné amplitudové spektrum je sudé, fázové liché. Amplitudu n -té harmonické složky dostaneme sečtením odpovídajících symetricky položených čar dvoustranného amplitudového spektra

$$A_n = |c_n| + |c_{-n}|.$$

Všimněme si nyní středního výkonu (1.21) periodického signálu za periodu. Při respektování vlastností periodického signálu uvedených na začátku této kapitoly a podle (2.2) můžeme psát pro střední výkon obecně komplexního signálu

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot s^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t} \right) dt. \end{aligned}$$



Obr. 2.11

Suma v závorce představuje Fourierovu řadu. Je-li jí odpovídající signál spojitý, lze řadu integrovat člen po členu [12], tj.

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* c_n$$

a tedy střední výkon

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (2.34)$$

je roven součtu výkonů $|c_n|^2$ přenášených na úhlových kmitočtech $n\omega_0$ (Parsevalova věta). Posloupnosti $\{|c_n|^2\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ říkáme výkonové spektrum. Zde si povšimněme toho, že výkon n -té harmonické složky musí být

$$P_n = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2,$$

což po dosazení (2.32) dá

$$P_n = \frac{A_n^2}{2},$$

tedy kvadrát efektivní hodnoty harmonického signálu. Výkon podle (2.34) je aditivní, protože signály $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ jsou ortogonální (viz kap. 1.5 a 5.2.2).

2.3.4 Chování vyšších harmonických složek

Soustavy přenášející signály nemohou přenést celé nekonečně široké spektrum kmitočtů a vyšší kmitočty potlačí. Z těchto důvodů nás zajímá, jak velké jsou vyšší harmonické složky periodického signálu a jak se chovají pro $n \rightarrow +\infty$.

Pro signály, které jsou absolutně integrovatelnými funkcemi na intervalu periodicity (signály s konečnou energií tuto vlastnost mají) platí Riemannova-

Lebesgueova věta [12], podle níž pro $n \rightarrow +\infty$ je $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$.

Je-li signál $S(t)$ periodická funkce spojitá včetně jejích derivací až do řádu $k-1$, $k \geq 1$ a derivace řádu k je po úsecích spojitá, existuje $M > 0$ takové, že amplitudy harmonických složek signálu $S(t)$.

$$A_n \leq \frac{M}{n^{k+1}} \quad (2.35)$$

Má-li signál konečný počet skoků v intervalu periodicity a ve všech ostatních bodech má 1. derivaci, platí pro amplitudy harmonických složek

$$A_n \leq \frac{M}{n} \quad (2.36)$$

(Čtenář si sám snadno přeformuluje (2.35) a (2.36) pro koeficienty $|C_n|$).

2.3.5 Zvláštní případy signálů

Je-li signál $S(t)$ lichou reálnou funkcí, tj. $s(-t) = -s(t)$ (např. podle obr. 2.12), je integrand ve vztazích (2.19a) a (2.19b) také lichou funkcí a jeho integrál v mezích symetrických vůči počátku je nulový. Integrand ve (2.19c) je sudou funkcí a proto koeficienty trigonometrické Fourierovy řady

$$a_n = 0 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \sin n\omega_0 t \, dt.$$

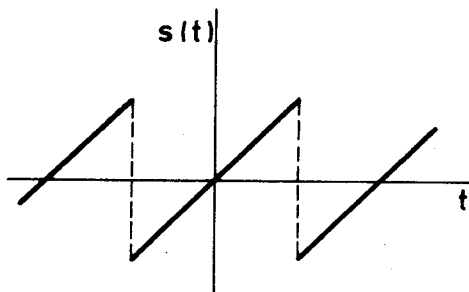
Koeficienty komplexní Fourierovy řady jsou ryze imaginární a

$$|c_n| = \left| \frac{b_n}{2} \right|,$$

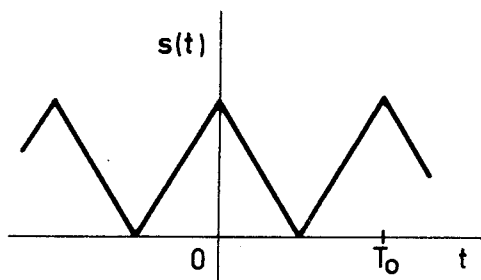
$$\varphi_n = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Je-li signál $S(t)$ sudou reálnou funkcí, tj. $s(-t) = s(t)$ (obráz. 2.13), budou sudými funkcemi integrandy výrazů (2.19a), (2.19b) a integrand ve (2.19c) bude funkcí lichou. Proto



Obr. 2.12



Obr. 2.13

$$b_n = 0 ,$$

$$a_0 = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) dt ,$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cos n\omega_0 t dt , \quad n=1,2,3,\dots$$

Koeficienty komplexní Fourierovy řady jsou reálné a

$$|c_n| = \left| \frac{a_n}{2} \right|$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots$$

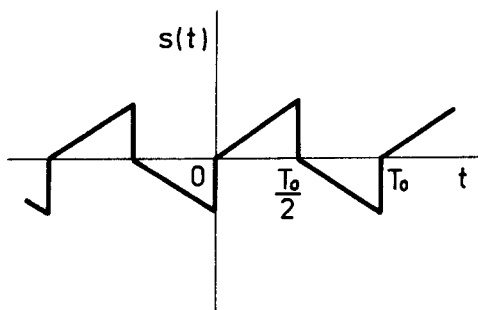
Uvedené výsledky jsou zřejmé z názoru: Lichý signál podle obr. 2.12 můžeme složit jen z lichých funkcí - sinusovek a proto jsou koeficienty a_n u kosinových členů nulové. Nemůže obsahovat stejnosměrnou složku. Sudý signál podle obr. 2.13 naopak může obsahovat stejnosměrnou složku a musí být složen jen ze sudých funkcí - kosinusovek. Koeficienty b_n u sinusových členů jsou proto nulové. (Z uvedeného také vyplývá, proč je zvykem označovat stejnosměrnou složku písmenem a stejně jako koeficienty u kosinových členů).

Další zvláštní případ nastane u signálů, pro které

$$s(t + \frac{T_0}{2}) = -s(t)$$

(obr. 2.14). Neobsahují stejnosměrnou složku a obsahují jen liché harmonické, tj.

$$a_0 = a_2 = a_4 = \dots = b_2 = b_4 = \dots = 0.$$



Obr. 2.14

2.3.6 Stejnomořná konvergence a Gibbsův jev

Podle [11] platí dvě věty:

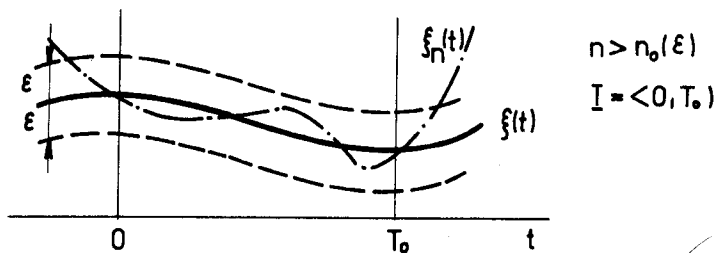
1) Nechť signál $S(t)$ je spojitou funkcí v intervalu periodicity $\langle 0, T_0 \rangle$, má v něm po úsecích spojitou první derivaci a platí $S(0) = S(T_0)$. Potom jeho Fourierova řada konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$.

2) Nechť signál $S(t)$ je funkce absolutně integrovatelná v intervalu periodicity $\langle 0, T_0 \rangle$ a spolu se svou derivací spojitá v nějakém intervalu (a, b) , $0 \leq a < b \leq T_0$. Potom pro každé $\delta < 0$ konverguje jeho Fourierova řada stejnoměrně v intervalu $\langle a + \delta, b - \delta \rangle$.

Stejnomořná konvergence nás zajímá především když signál nenahrazujeme teoreticky nekonečným součtem, ale aproximujeme ho částečným součtem řady s konečným počtem členů. Stejnomořná konvergence znamená, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít takové n_0 , stejně pro všechno t z intervalu I stejnoměrné konvergence, že pro všechna $n > n_0$ a $t \in I$ platí

$$|\xi_n(t) - \xi(t)| < \varepsilon,$$

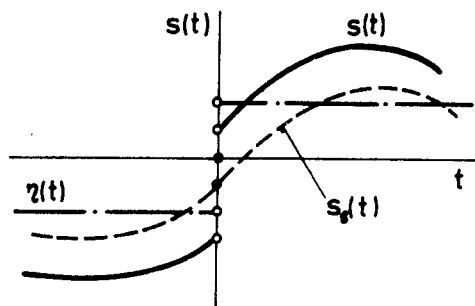
kde $\xi(t)$ je součet Fourierovy řady a $\xi_n(t)$ je součet n harmonických složek. Tedy částečné součty konvergují k součtu řady v intervalu I "přibližně stejně rychle" [12] (viz obr. 2.15).



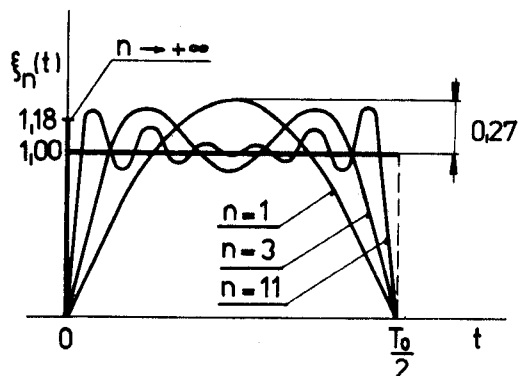
Obr. 2.15

Tzn., že v okolí bodů nespojitosti signálu mohou částečné součty konvergovat k signálu podstatně hůře, než v oblastech, kde je signál spojitý. Signál $S(t)$ s nespojitostí 1. druhu můžeme snadno nahradit součtem signálu spojitého $S_g(t)$ a jednotkového skoku $\eta(t)$ (obr. 2.16) a můžeme se tedy zabývat konvergencí řady pro signál $\eta(t)$. Průběh částečného součtu závisí na počtu členů n a je pro obdélníkový signál naznačen na obr. 2.17.

V okolí bodu nespojitosti se objevují překmity. Při nahrazení obdélníkového signálu prvním částečným součtem (tj. sinusovkou) je překmit 27 %. S růstem počtu členů částečného součtu velikost překmitů poněkud klesá, překmity se "zhušťují" a přibližují k bodu nespojitosti. Pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme signál, který se od původního liší jen nekonečně úzkými překmity v bodě nespojitosti. Tyto překmity činí 18 %, což je jejich nejmenší hodnota. Popsaný jev se nazývá Gibbsův. Blížší popis lze nalézt v [17], [107], [117].



Obr. 2.16

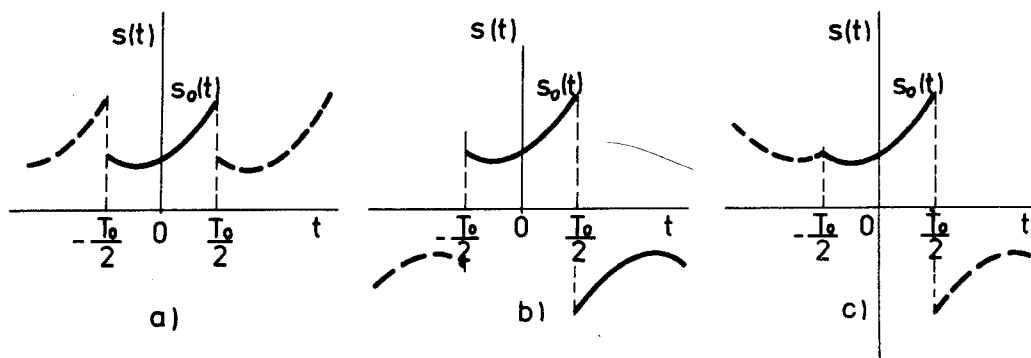


Obr. 2.17

2.3.7 Fourierova řada neperiodického signálu

Fourierovu řadu můžeme najít i k neperiodickému signálu $S_0(t)$ který je buď definován jen ve intervalu $\langle -\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \rangle$, nebo je mimo tento interval nulový. Ze signálu $S_0(t)$ vytvoříme periodický signál tzv. periodickým prodloužením (obr. 2.18a). Fourierova řada samozřejmě existuje a je nenulová i mimo $\langle -\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \rangle$, zatímco signál tam buď není definován, nebo je nulový.

K signálu $S_0(t)$ lze sestavit také liché nebo sudé prodloužení (obr. 2.18b, c) a rozvinout ho do sinové nebo kosinové Fourierovy řady.



Obr. 2.18

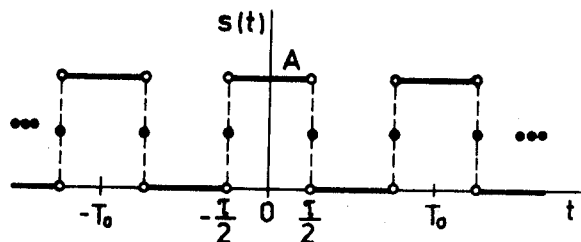
2.3.8 Spektrum sledu obdélníkových impulsů

Jednou z velmi často se vyskytujících aproximací reálných signálů je sled obdélníkových impulsů (obr. 2.19).

Poznamenejme, že skutečný signál

- 1) nemůže mít nekonečnou délku,
- 2) nemá nespojitosti (bude lichoběžníkový ap.).

Vyšetřujme nyní spektrum signálu podle obr. 2.19. Jde o funkci po úsecích hladkou a proto existuje její Fourierova řada:



Obr. 2.19

1) Trigonometrická Fourierova řada:

a) $s(t)$ je sudá funkce, proto koeficienty u sinových členů jsou nulové,
 $b_n = 0, n = 1, 2, \dots,$

b) koeficient a_0 podle (2.19a)

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{\tau}{2}} A dt = 2 \cdot \frac{\tau}{T_0} A \quad (2.37)$$

a tedy stejnosměrná složka je $A \frac{\tau}{T_0}$, což odpovídá popisu u výrazu (1.15),

c) koeficienty u kosinových členů podle (2.19b)

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4A}{T_0} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos n\omega_0 t dt = \frac{4A}{T_0} \frac{1}{n\omega_0} \sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}.$$

Výsledek upravíme na častěji užívaný tvar

$$a_n = \frac{4A}{T_0} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} = 2A \frac{\tau}{T_0} \cdot \frac{\sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}}. \quad (2.38)$$

d) Fourierova řada pro obdélníkový signál

$$\tilde{s}(t) = A \frac{\tau}{T_0} + 2A \frac{\tau}{T_0} \left[\frac{\sin \omega_0 \frac{\tau}{2}}{\omega_0 \frac{\tau}{2}} \cos \omega_0 t + \frac{\sin 2\omega_0 \frac{\tau}{2}}{2\omega_0 \frac{\tau}{2}} \cos 2\omega_0 t + \dots \right]. \quad (2.39)$$

2) Komplexní Fourierova řada

a) Koeficienty vypočítáme

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{(-jn\omega_0)} \left[e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{+jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right] = \\ &= \frac{A}{n\omega_0 T_0} \cdot 2 \frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{2j} = A \cdot \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

b) Řada pak je

$$f(t) = A \frac{T}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{T}{2})}{n\omega_0 \frac{T}{2}} \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (2.41)$$

Řadu můžeme upravit

$$\begin{aligned} f(t) &= A \frac{T}{T_0} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{T}{2})}{n\omega_0 \frac{T}{2}} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \right] = \\ &= A \frac{T}{T_0} + 2A \frac{T}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{T}{2})}{n\omega_0 \frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \end{aligned}$$

Získaný výsledek odpovídá (2.39) a dokumentuje naše tvrzení, že komplexní Fourierova řada je jen jiným zápisem Fourierovy řady trigonometrické (kap. 2.3.2).

3) Harmonické složky obdélníkového signálu mají velikost

$$A_n = 2|c_n| = 2A \frac{T}{T_0} \left| \frac{\sin n\omega_0 \frac{T}{2}}{n\omega_0 \frac{T}{2}} \right|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

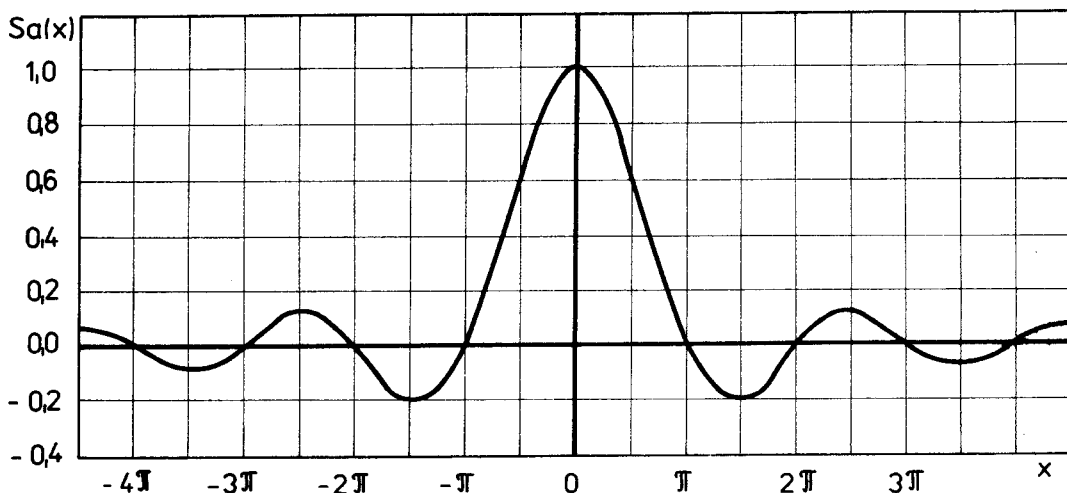
Zavedeme-li funkci

$$Sa(x) = \begin{cases} 1 & i \quad x = 0, \\ \frac{\sin x}{x} & i \quad x \neq 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

můžeme (2.42) přepsat

$$A_n = 2A \frac{T}{T_0} \left| Sa(n\omega_0 \frac{T}{2}) \right|. \quad (2.44)$$

Průběh funkce $Sa(x)$ je na obr. (2.20) [3].

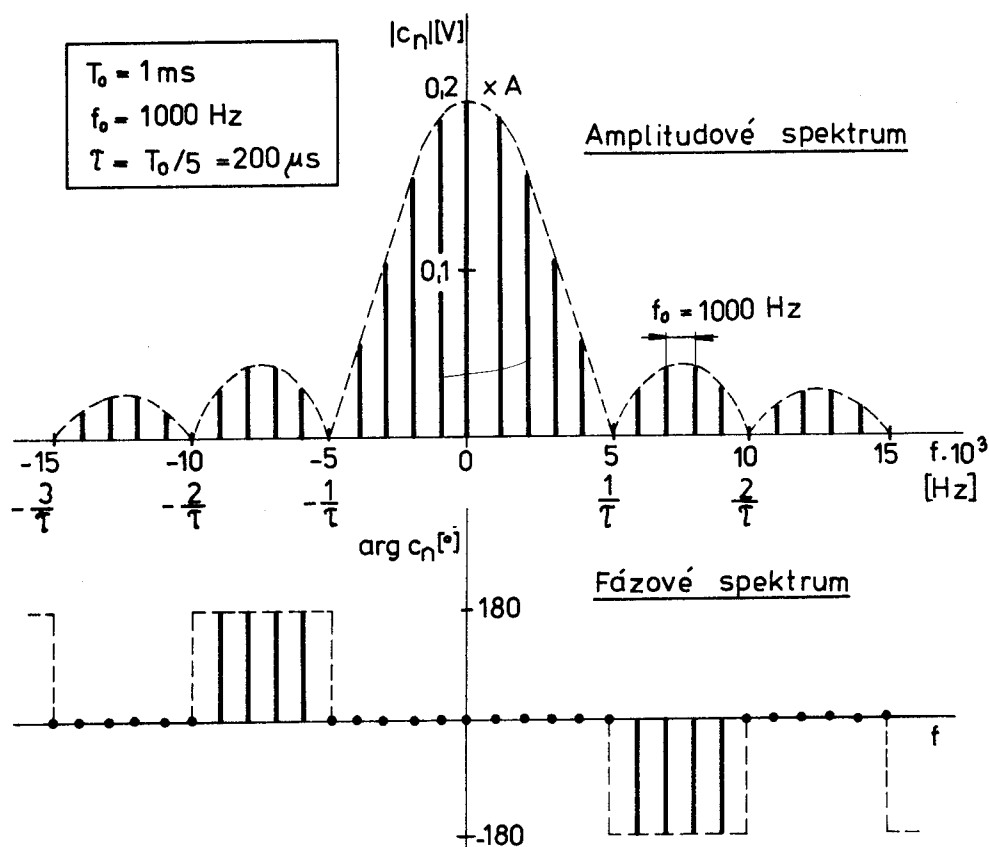


Obr. 2.20

Hodnoty c_n se řídí funkcí $Sa(x)$ i pro $n = 0$

$$c_n = A \frac{\tau}{T_0} \cdot Sa\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right). \quad (2.45)$$

Záporným hodnotám c_n odpovídá v souladu s (2.33) fáze posunutá o 180° .
Dvoustranné amplitudové a fázové spektrum sledu obdélníkových impulsů je na obr. 2.21.



Obr. 2.21

- 4) Ze (2.44) je zřejmé, že amplitudy harmonických složek klesají s rostoucím n v souladu s (2.36).
- 5) Čtenář si sám může ověřit, že

$$\xi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{A}{2},$$

tj. součet řady v bodě nespojitosti je $\frac{1}{2} [s(t+0) - s(t-0)]$.
Sestavením částečných součtů lze snadno ověřit Gibbsův jev.

2.4 VZÁJEMNÁ KORELAČNÍ A AUTOKORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÝCH SIGNÁLŮ

Mějme dva periodické signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ s periodou T_0 .
Pro jejich vzájemnou korelační funkci (1.30) můžeme napsat

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t) s_2(t + \tau) dt =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nT_0 + c} \left[n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_1(t) s_2(t + \tau) dt + \int_0^c s_1(t) s_2(t + \tau) dt \right],$$

$$0 \leq c < T_0.$$

Při respektování (2.2) dostaneme pro vzájemnou korelační funkci dvou periodických signálů $s_1(t), s_2(t)$, které mají stejnou periodu T_0 , výraz

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_1(t) s_2(t + \tau) dt. \quad (2.46)$$

Platí-li pro koeficienty komplexní Fourierovy řady obou signálů

$$c_{n_1} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt,$$

$$c_{n_2} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt,$$

můžeme psát (Fourierovu řadu lze integrovat člen po členu [127])

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_1(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n_2} e^{jn\omega_0(t+\tau)} \right] dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[c_{n_2} e^{jn\omega_0 \tau} \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_1(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right],$$

tj:

$$R_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n_1}^* c_{n_2} e^{jn\omega_0 \tau}. \quad (2.47)$$

V případě $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$
ní funkci periodického signálu

je $c_{n_1} = c_{n_2}$ a (2.46) přejde v autokorelač-

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) s(t + \tau) dt, \quad (2.48)$$

kteřou lze vyjádřit pomocí koeficientů komplexní Fourierovy řady z (2.47)

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \cdot e^{jn\omega_0\tau}. \quad (2.49)$$

V kap. 2.3.3 jsme posloupnost $\{|c_n|^2\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ nazvali výkonové spektrum. Z (2.49) je zřejmé, že jednotlivé složky výkonového spektra představují koeficienty Fourierovy řady, do které jsme rozvinuli autokorelační funkci $R(\tau)$. Můžeme tedy pro ně psát

$$|c_n|^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R(\tau) \cdot e^{-jn\omega_0\tau} d\tau. \quad (2.50)$$

Z uvedeného plynou dvě vlastnosti autokorelační funkce periodického signálu:

- 1) Autokorelační funkce signálů, které mají stejné výkonové (a také amplitudové) spektrum, jsou stejné bez ohledu na průběh fázového spektra (viz 2.49).
- 2) Autokorelační funkce $R(\tau)$ (2.48) periodického signálu je periodickou funkcí posunutí τ se stejnou periodou T_0 jako má signál. (Této vlastnosti se využívá při zjišťování periodického signálu skrytého v šumu). Pro $\tau = k T_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ nabývá $R(\tau)$ maximální hodnoty.

2.4.1 Autokorelační funkce harmonického signálu

Určíme autokorelační funkci harmonického signálu

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

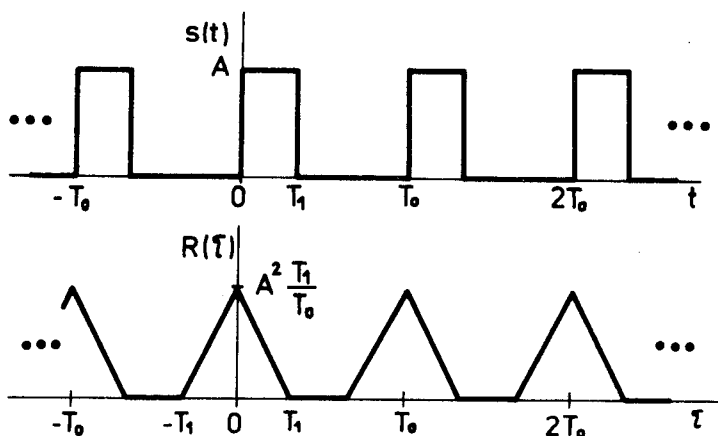
Podle (2.48)

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{A^2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) dt = \\ &= \frac{A^2}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{2} [\cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0 \tau) + \cos \omega_0 \tau] dt = \\ &= \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \cos \omega_0 \tau dt, \end{aligned}$$

tj:

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.51)$$

2.4.2 Autokorelační funkce sledu obdélníkových impulsů



Hledejme
autokorelační funkci
sledu obdélníkových
impulsů širokých
 T_1 a opakujících
se s periodou T_0
Jejich amplituda
je A .

Obr. 2.22

Integrál

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) s(t+\tau) dt$$

rozdělíme na tři oblasti

$$1) \quad 0 \leq \tau < T_1 : R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_1-\tau} A^2 dt = A^2 \frac{T_1-\tau}{T_0},$$

$$2) \quad T_1 \leq \tau < T_0 - T_1 : R(\tau) = 0,$$

$$3) \quad T_0 - T_1 \leq \tau < T_0 : R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0-\tau}^{T_1} A^2 dt = A^2 \frac{T_1 - T_0 + \tau}{T_0}.$$

Autokorelační funkce sledu obdélníkových impulsů je sled trojúhelníkových impulsů s periodou T_0 (obr. 2.22).

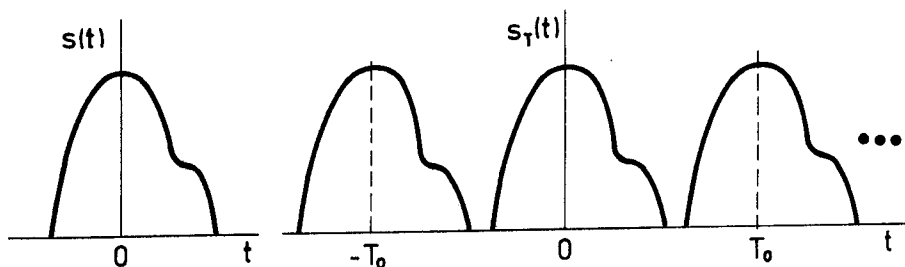
3. NEPERIODICKÉ DETERMINOVANÉ SIGNÁLY A JEJICH SPEKTRUM

V předcházející kapitole jsme ukázali, že periodické signály můžeme vyjádřit nejen v časové oblasti, ale také v oblasti kmitočtů (obr. 2.10) pomocí Fourierovy řady.

Pomocí Fourierovy řady můžeme vyjádřit i neperiodické signály, ale jen na konečném časovém intervalu (viz odst. 2.3.7). Vně tohoto intervalu se signál a řada liší - řada dává periodické prodloužení (neperiodického) signálu.

Reálně existující signály jsou signály finitní - nenulové na konečném intervalu $\langle t_a, t_b \rangle$ a vně tohoto intervalu nulové. I ty potřebujeme vyjádřit v oblasti kmitočtu. Na rozdíl od odst. 2.3.7 potřebujeme tedy v kmitočtové oblasti vyjádřit signály definované na celé časové ose. To umožňuje Fourierova transformace, kterou zavedeme jako periodické prodloužení signálu s periodou rostoucí nade všechny meze [3].

3.1 FOURIEROVA TRANSFORMACE



Obr. 3.1

K signálu $s(t)$, který chceme vyjádřit pro $t \in (-\infty, +\infty)$ sestrojíme periodický signál $s_T(t)$ tak, aby se nenulové hodnoty nepřekrývaly (obr. 3.1). Bude-li perioda T_0 tohoto signálu růst nade všechny meze, dostaneme původní signál

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} s_T(t) = s(t).$$

Pro periodický signál $s_T(t)$ můžeme psát komplexní Fourierovu řadu

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (3.1)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad (3.2)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (3.3)$$

Víme, že $\{C_n\}$ představuje tzv. čárové spektrum periodického signálu. Jeho složky - čáry - jsou od sebe v kmitočtové oblasti vzdáleny ω_0 (3.3). Bude-li se perioda T_0 zvětšovat, bude klesat jejich vzdálenost. Bude klesat také $|C_n|$, ale tvar spektra bude zachován. Pro $T_0 \rightarrow +\infty$ se bude amplituda složek blížit nule, jejich vzdálenost bude nekonečně malá a počet poroste nade všechny meze; čárové diskrétní spektrum přejde ve spektrum spojitě. Označme

$$n \omega_0 = \omega_n$$

Součin $T_0 C_n$ vyjádříme pomocí (3.2) a označíme

$$S_T(\omega_n) = T_0 C_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s_T(t) e^{-j\omega_n t} dt. \quad (3.4)$$

Periodický signál $s_T(t)$ můžeme podle (3.1) zapsat

$$\begin{aligned} s_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_0 C_n e^{j\omega_n t} = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_T(\omega_n) e^{j\omega_n t}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za T_0 z (3.3), dostaneme

$$s_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_T(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_0. \quad (3.5)$$

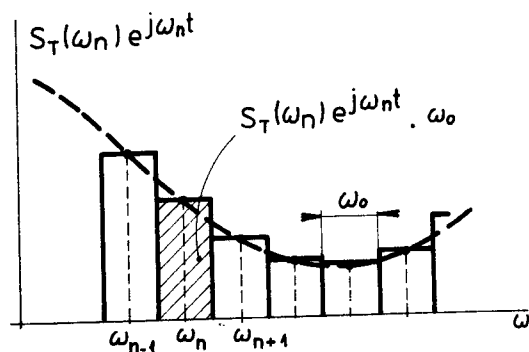
Pomocí tohoto výrazu je signál $s_T(t)$ vyjádřen jako suma exponenciál na úhlových kmitočtech $\omega_1, \omega_2, \dots$. Amplitudy exponenciál jsou

$$S_T(\omega_n) \frac{\omega_0}{2\pi}$$

tj. jsou úměrné $S_T(\omega_n)$. Předpokládáme, že

$$S_T(\omega_n) \cdot e^{j\omega_n t}$$

je reálné číslo a znázorníme na obr. 3.2 výraz (3.5).



Obr. 3.2

Plochy obdélníků odpovídají sčítancům v (3.5). S růstem T_0 bude klesat jejich šířka ω_0 a budou stále lépe aproximovat plochu pod čárkovanou křivkou. Pro $T_0 \rightarrow +\infty$ můžeme místo ω_0 psát $d\omega$ a místo sumy integrál. Dále nahradíme $S_T(\omega_n) \cdot e^{j\omega_n t}$ spojitou funkcí úhlového kmitočtu $S(\omega)e^{j\omega t}$ a $s_T(t)$ původním signálem $s(t)$, pro který tedy platí

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

a podle (3.4)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.7)$$

Podle (3.6) vyjádřujeme neperiodický signál $s(t)$ jako "spojitou sumu" exponenciál na úhlových kmitočtech $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Amplitudy všech složek jsou nekonečně malé (obsahují $d\omega$) a úměrné $S(\omega)$. $S(\omega)$ je kmitočtové spektrum signálu $s(t)$.

Výrazy (3.6) a (3.7) jsou známy jako dvojice ve Fourierově transformaci: (3.7) je přímá Fourierova transformace, kterou získáme k originálu $s(t)$ obraz $S(\omega)$. Výraz (3.6) je zpětná (inverzní) Fourierova transformace. Budeme také psát

$$S(\omega) = F[s(t)],$$

$$s(t) = F^{-1}[S(\omega)],$$

příp. označovat, že s originálem $s(t)$ koresponduje obraz $S(\omega)$

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega).$$

Ze vztahu (3.7) je zřejmé, že Fourierova transformace existuje, jestliže má integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

konečnou hodnotu. Protože modul $e^{-j\omega t}$ je roven jedné, je postačující podmínkou existence Fourierovy transformace absolutní integrovatelnost $s(t)$ [3], tj. existence konečné hodnoty integrálu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt.$$

Této podmínce vyhovují signály s konečnou energií [12].

Uvedená podmínka je postačující a proto mohou existovat signály, které nejsou absolutně integrovatelné a mají Fourierovu transformaci. Patří sem např. signály $\sin \omega t$, $\eta(t)$, ke kterým, přísně vzato, neexistuje Fourierova transformace, avšak limitním přechodem ji lze nalézt.

3.1.1 Amplitudové a fázové spektrum

Obraz $S(\omega)$ je komplexní veličina

$$S(\omega) = |S(\omega)| e^{j \arg S(\omega)} \quad (3.8)$$

Modul $|S(\omega)|$ nazýváme amplitudové spektrum signálu $s(t)$, argument fázové spektrum.

Obvykle je signál $S(t)$ reálnou funkcí času. Potom z (3.7)

$$S(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j\omega t} dt = S^*(\omega),$$

tj.

$$S(-\omega) = |S(\omega)| e^{-j \arg S(\omega)} \quad (3.9)$$

Musí také platit podle (3.8)

$$S(-\omega) = |S(-\omega)| e^{j \arg S(-\omega)} \quad (3.10)$$

Z porovnání (3.9) a (3.10) plyne, že

- 1) amplitudové spektrum reálného signálu je sudou funkcí úhlového kmitočtu,
- 2) fázové spektrum reálného signálu je lichou funkcí úhlového kmitočtu.

Zvláštní případy nastanou, je-li signál $S(t)$ sudou nebo lichou funkcí času.

- 1) Je-li signál $S(t)$ sudou reálnou funkcí času, je jeho spektrum

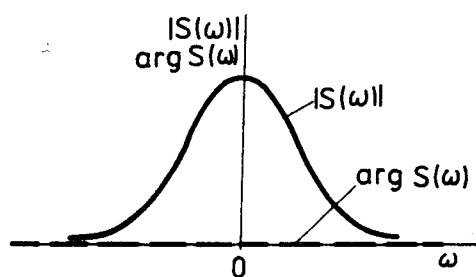
$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) [\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt \end{aligned}$$

sudou reálnou funkcí kmitočtu (obr. 3.3).

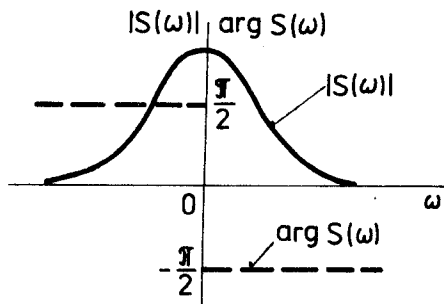
- 2) Je-li signál $S(t)$ lichou reálnou funkcí času, je jeho spektrum

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) [\cos \omega t - j \sin \omega t] dt = \\ &= -2j \int_0^{+\infty} s(t) \sin \omega t dt \end{aligned}$$

ryze imaginární lichou funkcí kmitočtu (obr. 3.4).



Obr. 3.3



Obr. 3.4

3.1.2 Hlavní vlastnosti Fourierovy transformace

Dále uvedeme věty nejčastěji užívané při výpočtu spekter signálů. Umožňují vypočítat spektrum složitých signálů, známe-li spektrum signálů jednodušších, aniž bychom museli používat definiční vzorec (3.7), příp. (3.6).

1. Věta o linearitě (superpozici signálů)

Čtenář přímo z (3.7) dokáže, že lineární kombinaci signálů odpovídá lineární kombinace jejich spekter, tj.

$$F \left[\sum_{i=1}^n a_i s_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n a_i F [s_i(t)] \quad (3.11)$$

2. Věta o posunu signálu v čase

Má-li signál $s(t)$ spektrum $S(\omega)$, má signál posunutý o t_d spektrum

$$F [s(t - t_d)] = S(\omega) e^{-j\omega t_d} \quad (3.12)$$

Amplitudové spektrum posunutého signálu se nemění, mění se jen fázové spektrum. Zvětší se fázové posuny složek úměrně zpoždění a kmitočtu; to proto, že zpoždění v čase se přepočítá na zpoždění ve fázi

$$\varphi_d = \frac{2\pi}{T_p} t_d.$$

Důkaz věty provede čtenář jistě snadno substitucí v (3.12) a použitím (3.7).

3. Věta o změně časového měřítka

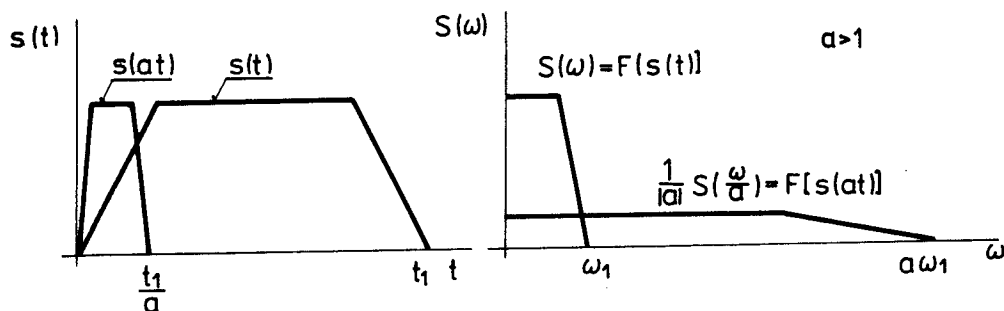
K signálu

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega)$$

vytvoříme signál $s(at)$. Pro spektrum tohoto signálu platí

$$F [s(at)] = \frac{1}{|a|} S \left(\frac{\omega}{a} \right) ; a \neq 0 \quad (3.13)$$

Větu snadno dokážeme substitucí za at a použitím (3.7). Fyzikálně lze větu vysvětlit tak, že časově zúženému signálu ($a > 1$) odpovídá širší spektrum a naopak. Velikost složek spektra se musí změnit tak, aby byly zachovány energetické poměry (obr. 3.5).



Obr. 3.5

4. Věta o symetrii Fourierovy transformace

Podle (3.6) je

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a z toho

$$2\pi s(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Pravá strana posledního výrazu představuje přímou Fourierovu transformaci funkce S proměnné ω . Levá strana je tedy obrazem funkce S . Tím jsme dokázali následující větu:

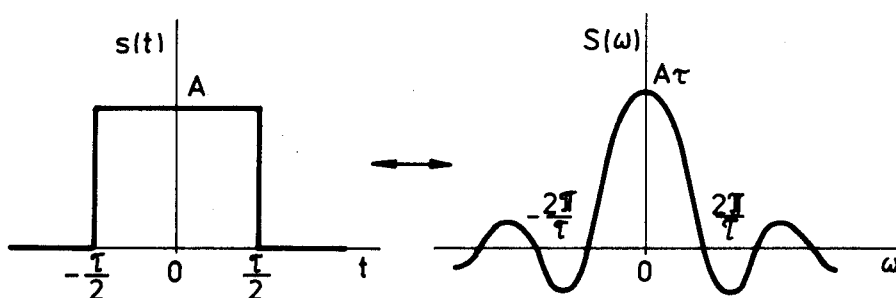
Jestliže

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega),$$

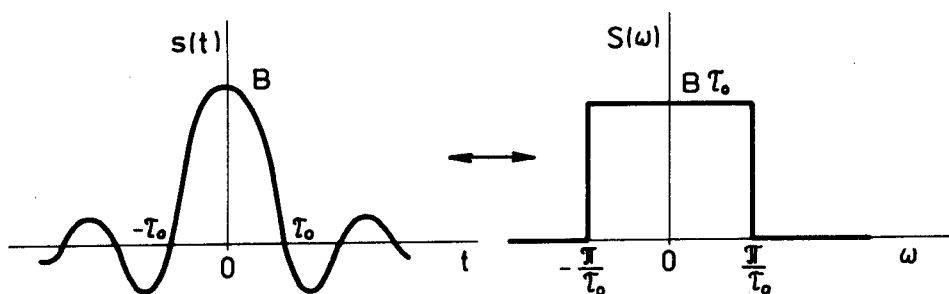
pak

$$F[S(t)] = 2\pi s(-\omega). \quad (3.14)$$

Použití věty ukažme na následujícím příkladu. Dále uvidíme, že obdélníkovému impulsu odpovídá spektrum typu $\sin x/x$ (viz obr. 3.6). Použitím věty (3.14) zjistíme, že spektrum signálu typu $\sin x/x$ je obdélníkové (viz obr. 3.7).



Obr. 3.6



Obr. 3.7

5. Věta o kmitočtovém posunu (modulační věta)

Mějme signál

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega)$$

a vytvořme k němu signál $s(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$. Spektrum tohoto signálu je

$$F[s(t) \cdot e^{j\omega_0 t}] = S(\omega - \omega_0).$$

(3.15)

Věta se snadno dokáže z definičního vzorce (3.7). Říká, že posun v oblasti

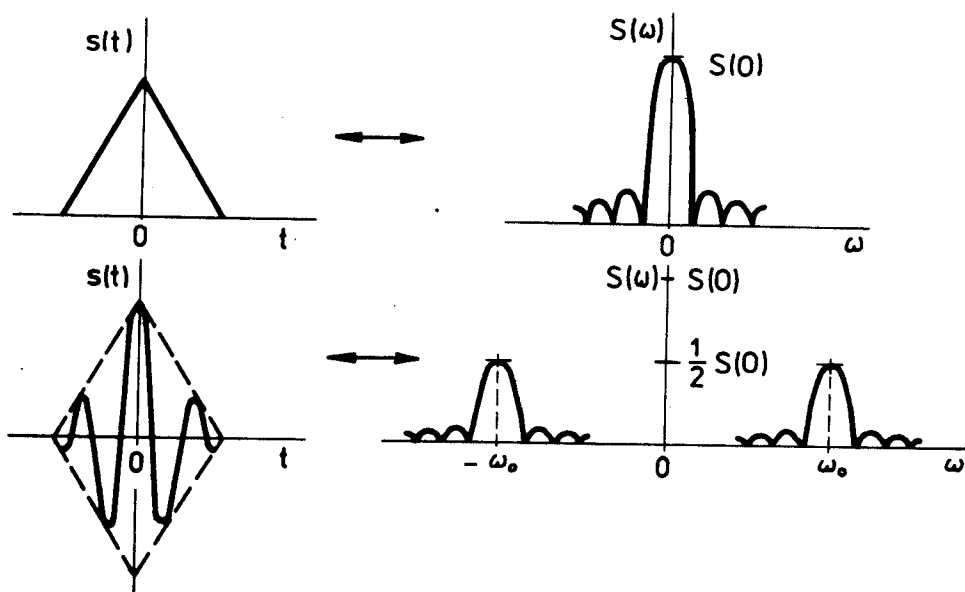
kmitočtu je ekvivalentní násobení signálu exponenciální funkcí. Použijeme ji zejména při modulacích, kdy potřebujeme spektrum signálu soustředěné na nízkých kmitočtech přesunout do okolí úhlového kmitočtu ω_0 . To zajistíme např. násobením $\cos \omega_0 t$. Lze totiž psát

$$s(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [s(t) e^{j\omega_0 t} + s(t) e^{-j\omega_0 t}]$$

a pak podle (3.15) a (3.11)

$$s(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)], \quad (3.16)$$

viz obr. 3.8.



Obr. 3.8

6. Věta o součinu signálů

Fourierova transformace součinu signálů je

$$\begin{aligned} F[s_1(t) s_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\Omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j(\omega - \Omega)t} dt \right] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\Omega) S_1(\omega - \Omega) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\Omega) S_2(\omega - \Omega) d\Omega. \end{aligned}$$

Integrál v posledním výrazu nazýváme konvolucí. Je funkcí ω a značíme ho $S_1(\omega) * S_2(\omega)$. Platí tedy věta:

Jestliže

$$s_1(t) \longleftrightarrow S_1(\omega),$$

$$s_2(t) \longleftrightarrow S_2(\omega),$$

je

$$F[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\Omega) S_2(\omega - \Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) * S_2(\omega) \quad (3.17)$$

Obrazem součinu signálů je konvoluce odpovídajících spekter dělená 2π .

7. Věta o součinu obrazů

Fourierova transformace konvoluce signálů je

$$\begin{aligned} F[s_1(t) * s_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{e}^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t - \tau) \bar{e}^{j\omega t} dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

Použijeme (3.12) a dostaneme

$$F[s_1(t) * s_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) [S_2(\omega) \bar{e}^{j\omega\tau}] d\tau = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

a tedy

$$F[s_1(t) * s_2(t)] = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \quad (3.18)$$

Obrazem konvoluce signálů je součin jejich spekter.

8. Věta o obrazu derivace signálu

Pro obraz derivace signálu platí

$$\begin{aligned} F\left[\frac{d}{dt} [s(t)]\right] &= F\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right]\right] \\ &= F\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega S(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right] = \\ &= F[F^{-1}[j\omega S(\omega)]] = j\omega S(\omega). \end{aligned}$$

Tento postup můžeme n-krát zopakovat a dostaneme

$$F\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n S(\omega) \quad (3.19)$$

9. Věta o obrazu integrálu signálu

Nechť

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega)$$

Pak

$$F \left[\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{j\omega} S(\omega), \quad (3.20)$$

jestliže

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = 0.$$

Dokáže se tak, že zavedeme

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \longleftrightarrow \Phi(\omega).$$

Potom podle (3.19)

$$F[s(t)] = F\left[\frac{d\varphi(t)}{dt}\right] = j\omega \Phi(\omega) = S(\omega).$$

Z toho

$$\Phi(\omega) = F\left[\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} S(\omega),$$

což jsme chtěli dokázat.

Postup je možný za podmínky, že $\varphi(t)$ je absolutně integrovatelná, což vyžaduje, aby $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = 0$, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = 0.$$

Tato podmínka je ekvivalentní $S(0) = 0$ (viz definiční vztah (3.7)).

10. Věta o derivaci podle kmitočtu

Derivováním definičního vztahu (3.7) dokážeme, že je-li

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega)$$

je

$$F[(1-jt)^n s(t)] = \frac{d^n S(\omega)}{d\omega^n}. \quad (3.21)$$

11. Věta o integrálu součinu signálů

Vyjádříme integrál součinu signálů pomocí spekter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(\omega) S_2(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li $s_1(t)$ pomocí $S_1(\omega)$, dostaneme obdobný vztah s $S_1(\omega)$ a $S_2^*(\omega)$. Platí tedy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(\omega) S_2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) S_2^*(\omega) d\omega \quad (3.22)$$

12. Parsevalova věta

Dosadíme-li do (3.22) $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (3.23)$$

Podle (1.20) představuje výraz vlevo od rovnítka energii signálu. Potom $|S(\omega)|^2 d\omega$ představuje energii nesenou signálem $S(t)$ v pásmu šířky $d\omega$ na kmitočtu ω . Proto nazýváme

$$C(\omega) = |S(\omega)|^2$$

spektrální hustotou energie. Celková energie signálu je dána součtem energií (3.23) na jednotlivých kmitočtech. Vztah (3.23) se někdy také nazývá Rayleighovou větou [13].

3.2 FOURIEROVA TRANSFORMACE NĚKTERÝCH SIGNÁLŮ

Uvedeme spektra signálů často používaných při teoretických rozborech. Je třeba upozornit, že řada z nich reálně nemůže existovat.

3.2.1 Spektrum Diracova impulsu

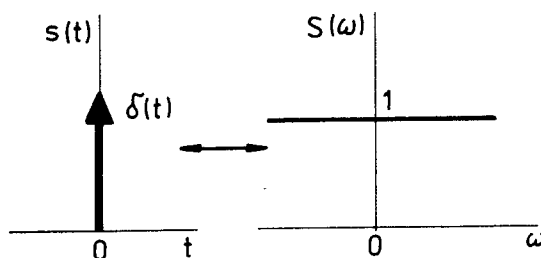
Použitím vzorkovací vlastnosti (1.14) Diracova impulsu dostaneme

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

$$F[\delta(t)] = 1$$

(3.24)

Diracův impuls má konstantní spektrum v celém rozsahu kmitočtů. Z průběhu signálu i spektra je zřejmé, že nemůže reálně existovat; podle (3.23) by vyžadoval nekonečnou energii. Tento "nekonečně strmý" impuls vyžaduje přítomnost nejvyšších kmitočtů (obr. 3.9).



Obr. 3.9

3.2.2 Spektrum konstantního signálu

Konstantní-stejnoseměrný-signal musí obsahovat jen složku na nulovém kmitočtu. Protože má neomezené trvání, nemůže reálně existovat, nese nekonečně velkou energii a proto i složka na nulovém kmitočtu musí být nekonečně velká:

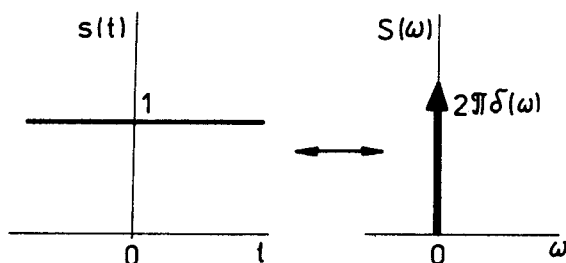
Protože $F[\delta(t)] = 1$, podle (3.24) a podle (3.14) je

$$F[S(t)] = 2\pi s(-\omega),$$

bude

$$F[1] = 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega) \quad (3.25)$$

viz obr. 3.10.



Obr. 3.10

Výsledek lze ověřit zpětnou Fourierovou transformací

$$F^{-1}[2\pi \delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = e^{j0} = 1.$$

3.2.3 Spektrum jednostranného exponenciálního signálu

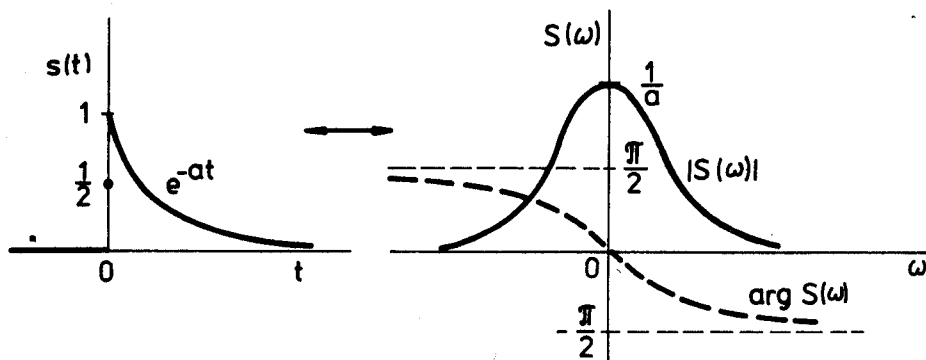
Signál zavedeme pomocí jednotkového skoku (1.1) $\chi(t)$

$$s(t) = e^{-at} \chi(t) \quad (3.26)$$

viz obr. 3.11. Jeho spektrum je

$$F[e^{-at} \chi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \chi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+a)t} dt = \frac{1}{a+j\omega},$$

$$F[s(t)] = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega}{a}}. \quad (3.27)$$



Obr. 3.11

Integrál konverguje jen pro $a > 0$.

3.2.4 Spektrum přepínacího signálu $\text{sign}(t)$

Chceme-li stanovit spektrum signálu $\text{sign}(t)$ (1.4), budeme opět mít potíže s konvergencí integrálu. Proto signál $\text{sign}(t)$ zavedeme jako limitní případ dvoustranného exponenciálního signálu

$$s(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad (3.28)$$

nebo

$$s(t) = e^{-at} \chi(t) - e^{at} \chi(-t), \quad (3.29)$$

tj.

$$\text{sign}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} \chi(t) - e^{at} \chi(-t)]$$

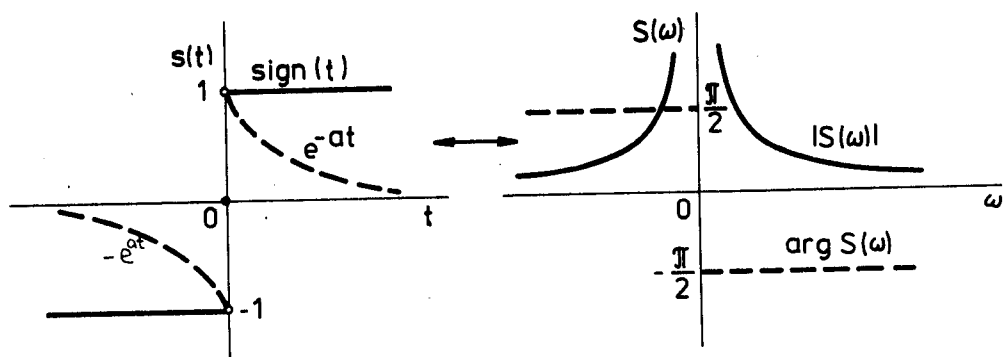
viz obr. 3.12.

Spektrum

$$\begin{aligned} F[\text{sign}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} F[s(t)] = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 (-e^{at}) e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j\omega t} dt \right] = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega}, \end{aligned}$$

$$\boxed{F[\text{sign}(t)] = \frac{2}{j\omega}}. \quad (3.30)$$

Výsledek odpovídá vlastnosti lichého signálu podle kapitoly 3.1.1.



Obr. 3.12

3.2.5 Spektrum jednotkového skoku

Jednotkový skok zavedeme pomocí přepínacího signálu

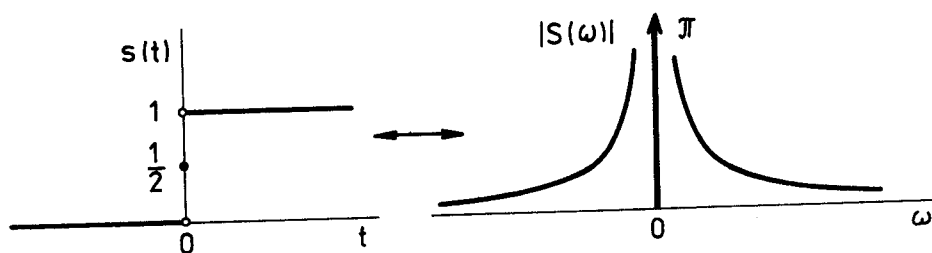
$$\eta(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(t)].$$

Jeho spektrum je s použitím (3.25) a (3.30)

$$\begin{aligned} F[\eta(t)] &= \frac{1}{2} \{ F[1] + F[\text{sign}(t)] \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2\pi \delta(\omega) + \frac{2}{j\omega} \right\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \end{aligned}$$

$$F[\eta(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

(3.31)



Obr. 3.13

První člen (3.31) odpovídá stejnosměrné složce (její "polovině" - viz (3.25), druhý člen odpovídá skoku o jedničku (viz 3.30).

3.2.6 Spektrum periodického signálu

Stroze vzato spektrum periodického signálu neexistuje, protože není splněno

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < +\infty$$

Transformace existuje jako limitní případ signálu definovaného na intervalu $(-T, +T)$, $T \rightarrow +\infty$.

Pro periodický signál můžeme psát komplexní Fourierovu řadu

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

a jeho transformace

$$F[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n F[e^{jn\omega_0 t}].$$

Z (3.25) a (3.15) dostaneme

$$F[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - n\omega_0).$$

Potom

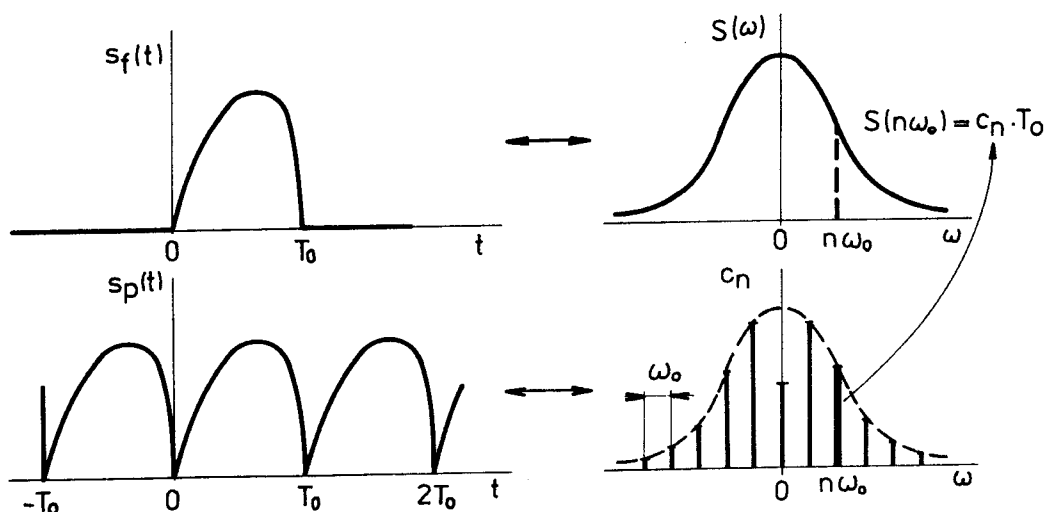
$$F[s(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0). \quad (3.32)$$

Spektrum periodického signálu se skládá z Diracových impulsů na kmitočtech harmonických složek. Jejich mohutnost je 2π krát větší než je hodnota odpovídajících koeficientů komplexní Fourierovy řady.

3.3 VZTAH MEZI FOURIEROVOU ŘADOU A FOURIEROVOU TRANSFORMACÍ

Protože se při výpočtu diskrétního čárového spektra periodických signálů i spojitého spektra signálů neperiodických vychází ze stejných vztahů, oba typy spekter spolu souvisí. Můžeme tedy např. ze spektra osamoceneného obdélníkového impulsu vypočítat velikost čar diskrétního spektra periodického sledu obdélníkových impulsů. Tato souvislost má praktický význam při výpočtu spektra, proto se jí budeme dále zabývat.

Předpokládejme, že existuje finitní signál $s_f(t)$ nenulový na intervalu (t_a, t_b) . Dále nechť existuje periodický signál $s_p(t)$, který vznikne periodickým opakováním signálu $s_f(t)$; perioda opakování je $T_0 > t_b - t_a$. Periodickému signálu přísluší komplexní Fourierova řada s koeficienty c_n , finitnímu spektrum $S(\omega)$ (obr. 3.14).



Obr. 3.14

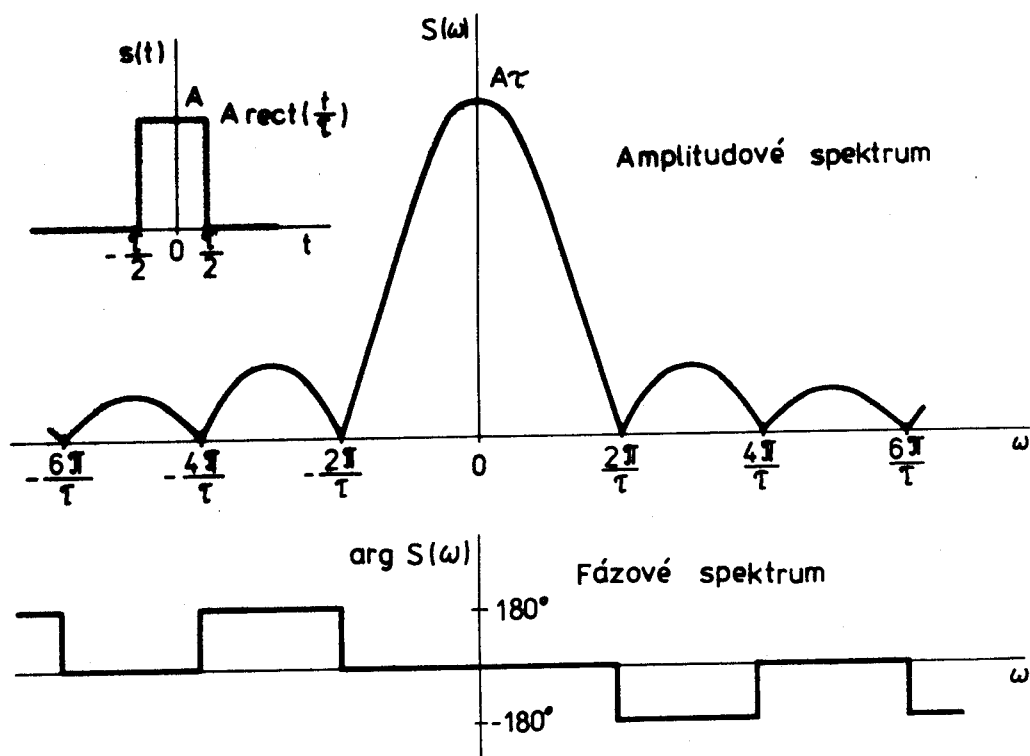
Při odvozování spektra neperiodického signálu jsme došli k výrazu (3.4).
Z něj vyplývá, že

$$c_n = \frac{S(\omega_n)}{T_0}, \quad (3.33)$$

tj. n -tý koeficient c_n komplexní Fourierovy řady pro $S_p(t)$ získáme z hodnoty spektra $S(\omega)$ signálu $S_f(t)$ na kmitočtu $\omega_n = \omega_0 n = \frac{2\pi}{T_0} n$.
Hodnotu spektra musíme dělit periodou T_0 podle (3.33).

Tuto vlastnost můžeme demonstrovat např. na obdélníkovém signálu. Vypočítáme spektrum signálu tvořeného osamoceným obdélníkovým impulsem šířky τ (obr. 3.15)

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} A \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \omega \frac{\tau}{2} \\ &= A \tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$



Obr. 3.15

Porovnejme toto spektrum s komplexní Fourierovou řadou pro sled obdélníkových impulsů vysokých A a širokých τ s opakovacím kmitočtem T_0 . V kapitole 2.3.8 jsme podle (2.40) pro tyto koeficienty dostali

$$c_n = A \frac{T}{T_0} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{T}{2})}{n\omega_0 \frac{T}{2}} .$$

Vidíme tedy, že i v tomto případě platí

$$c_n = \frac{S(\omega_n)}{T_0} \quad ; \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_0} n = n\omega_0 .$$

Poznamenejme, že spektrum (3.34) obdélníkového impulsu se řídí funkcí $\text{Sa}(\omega \frac{T}{2})$ (2.43) (obr. 2.20).

3.4 DÉLKA SIGNÁLU A ŠÍŘKA JEHO SPEKTRA

Při přenosu signálů nás zajímá, jaké kmitočtové pásmo musí být přeneseno, aby nedošlo ke zkreslení signálu. Potřebujeme tedy vědět, v jakém pásmu kmitočtové oblasti se signál nachází.

Podobně jako pro Fourierovu řadu (viz kap. 2.3.4) platí i pro spektrum signálu věta [11]: Pro Fourierovu transformaci $S(\omega)$ signálu $s(t)$, který je spojitý včetně svých derivací až do řádu $k-1$, $k \geq 1$, a jehož derivace k -tého řádu je po úsecích spojitá, platí: Existuje $M > 0$ tak, že

$$|S(\omega)| \leq \frac{M}{|\omega|^{k+1}} . \quad (3.35)$$

Tzn., že čím je signál hladší, tím rychleji jeho spektrum ubývá s rostoucím kmitočtem.

Fourierovu transformaci zapišme

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin \omega t \, dt .$$

Je-li signál $S(t)$ absolutně integrovatelný $\nabla < t_a, t_b >$, platí Riemannovo lemma [2], [14]

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{t_a}^{t_b} s(t) \cos \omega t \, dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{t_a}^{t_b} s(t) \sin \omega t \, dt = 0 . \quad (3.36)$$

Jeho význam můžeme interpretovat graficky (obr. 3.16).

Čím vyšší je úhlový kmitočet ω , tj. čím kratší je perioda

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

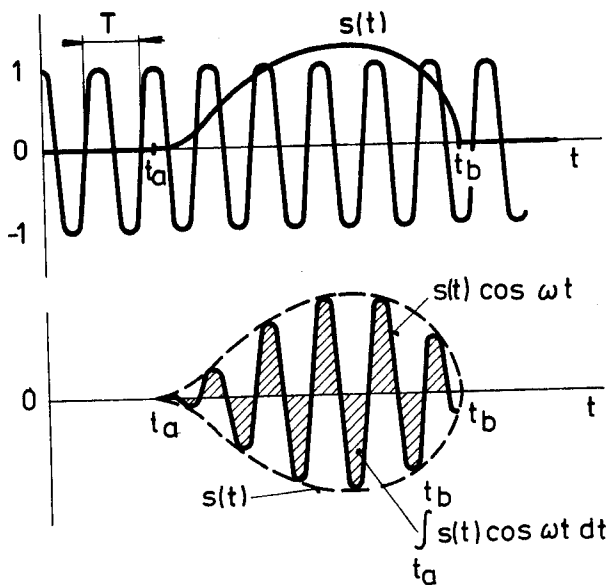
víci délce intervalu $< t_a, t_b >$, tím více se rovná plocha každé kladné půlvlny ploše záporné půlvlny a jejich součet, tj. integrál

$$\int_{t_a}^{t_b} s(t) \cos \omega t \, dt$$

nebo

$$\int_{t_a}^{t_b} s(t) \sin \omega t \, dt$$

se "lépe" blíží nule. Je zřejmé, že čím je kratší interval (t_a, t_b), na kterém je signál nenulový, tím musí být T menší, tj. ω větší, aby hodnoty integrálů byly zanedbatelné. Jinými slovy, čím je kratší signál, tím má širší spektrum a naopak.



Obr. 3.16

Všimněme si případů, na nichž můžeme tuto skutečnost demonstrovat. Především je to věta o změně časového měřítka (3.13), podle které se při zkrácení signálu rozšiřuje jeho spektrum (obr. 3.5). "Nekonečně dlouhému" konstantnímu signálu odpovídá "nekonečně úzké" spektrum podle (3.25) (obr. 3.10). "Nekonečně úzkému" Diracovu impulsu odpovídá "nekonečně široké" spektrum podle (3.24) (obr. 3.9). Mezi těmito extrémami leží např. obdélníkový impuls.

Obdélníkovému impulsu odpovídá nekonečně široké spektrum (obr. 3.15). Reálné systémy mohou přenést jen konečné spektrum a dojde tedy ke zkreslení časového průběhu. To však bude nepatrné, je-li v potlačené části spektra nesena jen malá část energie. V souladu s Parsevalovou větou (3.23) ponese tedy spektrum obdélníkového signálu omezené na pásmo B energii (viz (3.34))

$$E_B = \frac{1}{\pi} \int_0^B |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} A^2 \tau^2 \int_0^B \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2} d\omega.$$

Protože celková energie obdélníkového signálu je

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) \, dt = A^2 \tau,$$

můžeme po substituci $\omega \tau / 2 = z$ psát

$$E_B = E \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{B\tau}{2}} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz. \quad (3.37)$$

Vztah (3.37) přepíšme [14]

$$E_B = E \, I \left(\frac{B\tau}{2} \right), \quad (3.38)$$

kde integrál

$$I(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(2a) - \frac{\sin^2 a}{a} \right] \quad (3.39)$$

obsahuje integrální sinus. Závěs-
lost jeho hodnot na parametru a
je přibližně naznačena na obr.
3.17.

Z grafu 3.17

$$I(\pi) \doteq 0,9$$

(3.40)

Potom lze říci, že 90 %
energie obdélníkového signálu je
neseno v pásnu úhlových kmitočtů
 B , pro které platí

$$\frac{B\tau}{2} = \pi,$$

tj.

$$B = \frac{2\pi}{\tau},$$

což odpovídá právě hlavnímu laloku spektra (viz obr. 3.15).

Vynásobíme-li "technickou" šířku spektra obdélníkového impulsu délkou
trvání impulsu, dostaneme

$$\tau \cdot B = 2\pi, \quad (3.41a)$$

přip. pro B vyjádřené v Hz

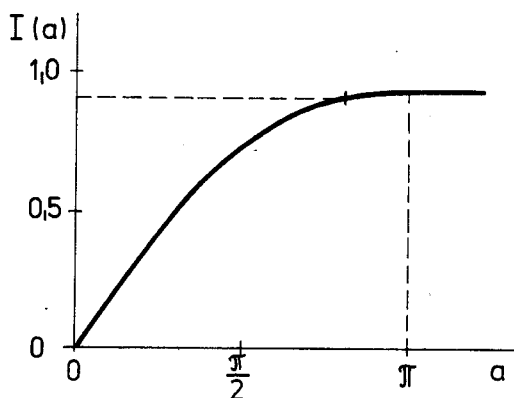
$$\tau B_f = 1. \quad (3.41b)$$

Jestliže pod - jak jsme řekli "technickou" - šířkou spektra signálu rozumíme
oblast kmitočtů, v níž je neseno 90 % energie signálu, je zřejmé z (3.41), že
úzce souvisí s trváním signálu: čím delší signál tím užší spektrum a naopak.

Kriteria pro stanovení "technické" šířky spektra mohou být jiná než
energetická. Často však má být součin trvání signálu a technické šířky jeho
spektra konstantní [2], [14], [15].

3.5 KORELAČNÍ FUNKCE NEPERIODICKÝCH SIGNÁLŮ

V kapitole 1.6 jsme zavedli korelační a autokorelační funkci. Pro energie-
tické signály jsme zavedli vzájemnou korelační funkci signálů $S_1(t)$ a $S_2(t)$
výrazem (1.32)



Obr. 3.17

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-\tau) s_2(t) dt.$$

Z věty (3.22) o integrálu součinu a z věty o posunu v čase (3.12) dostaneme

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(\omega) S_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (3.42)$$

kde

$$s_1(t) \longleftrightarrow S_1(\omega),$$

$$s_2(t) \longleftrightarrow S_2(\omega).$$

Položíme-li $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$, dostaneme autokorelační funkci (1.33)

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s(t-\tau) dt.$$

Do (3.42) dosadíme $S_1(\omega) = S_2(\omega) = S(\omega) \longleftrightarrow s(t)$ a dostaneme pro autokorelační funkci signálu $s(t)$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.43)$$

V Parsevalově větě (3.23) jsme označili

$$C(\omega) = |S(\omega)|^2 \quad (3.44)$$

jako spektrální hustotu energie. Ze (3.43) je zřejmé, že autokorelační funkci signálu můžeme zapsat jako inverzní Fourierovu transformaci spektrální hustoty energie

$$R(\tau) = F^{-1}[C(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.45)$$

a spektrální hustotu energie jako obraz autokorelační funkce

$$C(\omega) = F[R(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.46)$$

Z úvah uvedených v kap. 3.4 plyne, že čím je širší spektrum signálu, tím bude kratší interval τ , na němž budou hodnoty signálu korelované. Bude-li spektrum signálu úzké, bude interval, na němž jsou hodnoty signálu korelované, široký.

Ve spektrální hustotě energie $C(\omega)$ se neuplatňuje fázové spektrum. Proto mohou mít i různé signály stejnou autokorelační funkci.

3.6 SPEKTRUM HARMONICKÉHO SIGNÁLU A HARMONICKÉHO IMPULSU

Několikrát jsme zdůraznili, že harmonický signál nemůže existovat, protože by nesl nekonečnou energii. Ve skutečnosti existují signály, které mají harmonický průběh jen na konečném intervalu času. Zabývejme se nyní tím, jaký je rozdíl mezi spektry skutečně existujících "harmonických" signálů a spektry jejich "nekonečně dlouhých" idealizací.

3.6.1 Spektrum harmonického signálu

Harmonický signál

$$s(t) = A \cos \omega_0 t$$

můžeme rozvinout do komplexní Fourierovy řady

$$s(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} \left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right]$$

s koeficienty

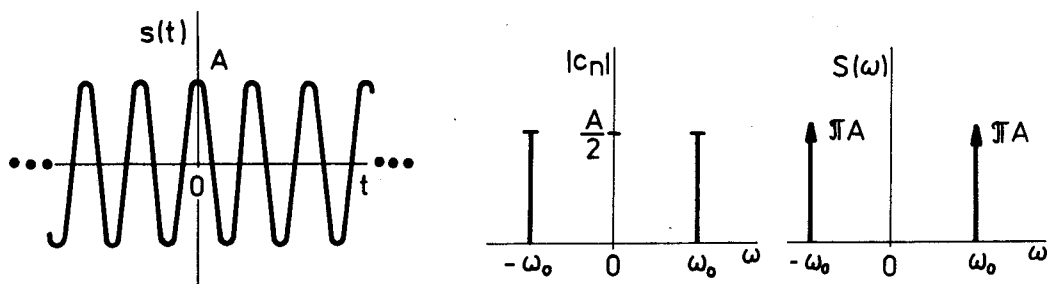
$$c_{-1} = c_1 = \frac{A}{2}$$

(Doporučujeme čtenáři, aby si porovnal tento nesrovnatelně jednodušší postup s dosazením do (2.26).)

Podle (3.32) spektrum (spojité, tj. Fourierova transformace) harmonického signálu

$$F[A \cos \omega_0 t] = \pi A [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.47)$$

tvoří dvě Diracovy impulsy s mohutností πA na kmitočtech $-\omega_0$ a ω_0 (viz obr. 3.18).



Obr. 3.18

3.6.2 Harmonický (rádiový) impuls

V technické praxi se zjednodušeně nazývá harmonickým signálem tzv. harmonický impuls, někdy také nazývaný rádiový impuls, tj. signál (obr. 3.19)

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t & ; |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & ; |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Signál můžeme vyjádřit s použitím (1.7) jako

$$s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega_0 t.$$

Podle (3.34) je

$$F\left[\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}$$

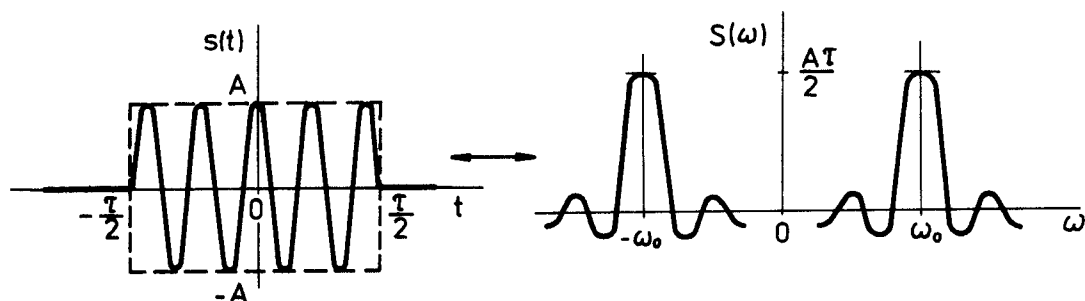
Dále použijeme větu o linearitě (3.11) a modulační větu (3.15) resp. (3.16) a dostaneme

$$\begin{aligned} S(\omega) &= F\left[A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega_0 t\right] = \\ &= \frac{A\tau}{2} \left[\frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}}{(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}} \right], \end{aligned}$$

tj.

$$S(\omega) = \frac{A\tau}{2} \left\{ \operatorname{Sa}\left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] + \operatorname{Sa}\left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] \right\}. \quad (3.48)$$

Spektrum je znázorněno na obr. 3.19.



Obr. 3.19

Funkce $\operatorname{Sa}(x)$ prochází nulami pro $x = k\pi$ (viz obr. 2.20), tj. pro

$$\omega - \omega_0 = k \frac{2\pi}{\tau}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Bude-li se délka impulsu τ zvětšovat, poroste hodnota $S(\omega_0)$, velikost postranních maxim bude klesat a nuly spektra se budou přibližovat ke kmitočtu ω_0 .

Protože platí [3]

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{\pi} \operatorname{Sa}(a\omega) = \delta(\omega),$$

bude pro $\tau \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} S(\omega) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{A\tau}{2} \left\{ \operatorname{Sa}\left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] + \operatorname{Sa}\left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] \right\} = \\ &= A\pi \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right], \end{aligned}$$

tj. vzorkovací funkce S_0 přešly ve dva Diracovy impulsy a spektrum harmonického impulsu podle obr. 3.19 přešlo ve spektrum harmonického signálu podle obr. 3.18.

"Harmonické" signály, které se vyskytují v praxi, tedy mají spektrum podle obr. 3.19. Čím déle existují, tím více je jejich spektrum "čistě" a blíží se čárovému spektru.

3.7 HILBERTOVA TRANSFORMACE. ANALYTICKÝ SIGNÁL

V radiotechnice se často zabýváme signály na výstupu filtrů s úzkým propustným pásmem, jejichž spektrum je soustředěno v úzkém rozmezí kolem středního kmitočtu. Pozorujeme-li je na osciloskopu, je zřejmé, že se mění jejich amplituda i kmitočet (fáze) (obr. 3.20).

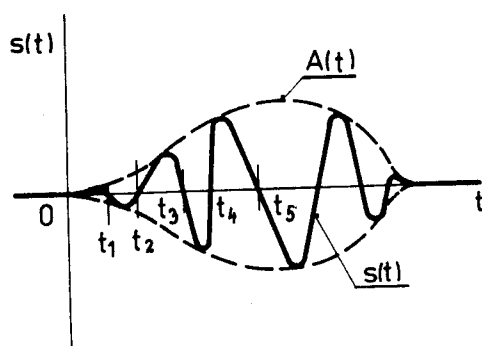
Takovéto signály chceme vyjádřit ve tvaru [14]

$$s(t) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (3.49)$$

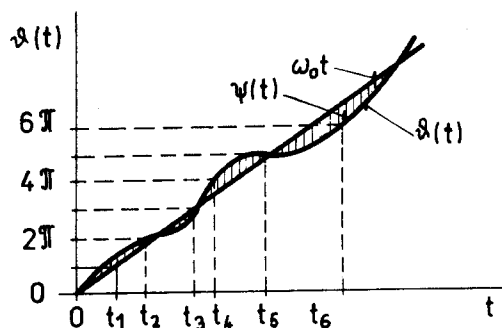
Změnu amplitudy signálu udává jeho obálka $A(t)$, od níž požadujeme, aby byla vždy větší než absolutní hodnota signálu $|s(t)| \leq A(t)$ a pokud je v některém okamžiku signálu rovna, žádáme, aby s ním měla tečný dotyk. O fázi signálu $\varphi(t)$ předpokládáme, že mezi dvěma změnami znaménka $s(t)$ se spojitě změní o π . V okamžicích změny znaménka nabývá hodnot $0, \pi, 2\pi, \dots$ (obr. 3.21). Závislost fáze na čase lze vyjádřit jako součet tří složek

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0 \quad (3.50)$$

kde ω_0 je střední kmitočet, φ_0 je počáteční hodnota fáze a $\psi(t)$ je nelineární změna fáze.



Obr. 3.20



Obr. 3.21

Můžeme v tomto případě také mluvit o okamžitém kmitočtu, který představuje přírůstek fáze

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \omega(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \left(\omega_0 + \frac{d\psi(t)}{dt} \right) \frac{1}{2\pi} \quad (3.51)$$

Vztah (3.49) nestačí k jednoznačnému určení obálky a fáze signálu. Použijeme analytický signál a Hilbertovu transformaci.

3.7.1 Hilbertova transformace

Fourierův obraz signálu můžeme rozdělit na reálnou a imaginární část

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (3.52)$$

Pro reálný signál je reálná část obrazu

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt \quad (3.53)$$

sudou funkcí úhlového kmitočtu a imaginární část

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin \omega t dt \quad (3.54)$$

je lichou funkcí. Potom můžeme pro zpětnou Fourierovu transformaci psát

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.55)$$

Přidružíme nyní k signálu $s(t)$ signál $\hat{s}(t)$ předpisem [4]

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [X(\omega) \cos \omega t + R(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (3.56)$$

spočívajícím v tom, že zaměníme koeficienty u sinu a kosinu, přičemž změním znaménko. Dosaďme-li do (3.56) vztahy (3.53) a (3.54), dostaneme

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} (-s(\tau) \sin \omega \tau \cos \omega t + s(\tau) \cos \omega \tau \sin \omega t) d\tau$$

a tedy

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \sin \omega (t - \tau) d\tau. \quad (3.57)$$

Předpis (3.57) nazýváme Hilbertovou transformací a píšeme

$$\hat{s}(t) = H[s(t)].$$

Hilbertova transformace se vyznačuje tím, že originál i obraz jsou ve stejné - zde časové - oblasti.

K signálu $\hat{s}(t)$ můžeme opět přidružit signál stejným způsobem, jako jsme získali (3.56) - tedy z (3.56) píšeme

$$\hat{\hat{s}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t + X(\omega) \sin \omega t] d\omega = -s(t). \quad (3.58)$$

Tak jako jsme (3.56) napsali ve tvaru (3.57), můžeme přepsat i (3.58) a dostaneme

$$s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\tau) \sin \omega (t - \tau) d\tau. \quad (3.59)$$

Vztah (3.59) představuje inverzní Hilbertovu transformaci

$$s(t) = H^{-1} [\hat{s}(t)].$$

Vztahy (3.57) a (3.59) zjednodušíme. Napíšeme (3.57) ve tvaru

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \sin \omega (t - \tau) d\tau.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme výrazy

$$\hat{s}(t) = H [s(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.60)$$

a

$$s(t) = H^{-1} [\hat{s}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{s}(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (3.61)$$

které se nejčastěji uvádí jako Hilbertova transformace. Hilbertovu transformaci můžeme vyjádřit také pomocí konvoluce

$$H [s(t)] = \frac{1}{\pi} s(t) * \frac{1}{t}, \quad (3.62)$$

$$H^{-1} [\hat{s}(t)] = -\frac{1}{\pi} \hat{s}(t) * \frac{1}{t}. \quad (3.63)$$

Hilbertova transformace je lineární a pro reálná $s(t)$ platí [4]:

$$H [a s(t)] = a \hat{s}(t),$$

$$H [s(t+a)] = \hat{s}(t+a),$$

$$H [s(at)] = \hat{s}(at).$$

Uvědomme si ještě, co fyzikálně znamená Hilbertova transformace, tedy přechod od výrazu (3.55) k (3.56). Změna $-\sin \omega t$ za $\cos \omega t$ a $\cos \omega t$ za $\sin \omega t$ znamená fázový posun všech kmitočtových složek o $\pi/2$.

Čtenář si může snadno ověřit, že pro $\omega > 0$ je

$$H [\sin \omega t] = -\cos \omega t, \quad (3.64)$$

$$H [\cos \omega t] = \sin \omega t. \quad (3.65)$$

3.7.2 Analytický signál

Zabývejme se nejprve periodickým signálem. Víme, že ho můžeme vyjádřit Fourierovou řadou

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t), \quad (3.66)$$

kteřou také můžeme přepsat (viz odst. 2.3.3)

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \quad (3.67)$$

Podle odst. 2.1 (obr. 2.3) si můžeme k -tou složku $r_k(t) = A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ periodického signálu, kde $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi_k = -\arctan(b_k/a_k)$, představit jako průmět komplexního vektoru

$$z_k(t) = A_k e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

na reálnou osu. Složku o $\pi/2$ posunutou, tj. $x_k(t) = A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$ si můžeme představit jako průmět vektoru na imaginární osu, tj.

$$z_k(t) = A_k e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} = r_k(t) + jx_k(t). \quad (3.68)$$

Při tom

$$r_k(t) = a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.69)$$

$$r_0(t) = \frac{a_0}{2}$$

a

$$x_k(t) = a_k \sin k\omega_0 t - b_k \cos k\omega_0 t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

Porovnáním (3.69) a (3.70) s (3.64) a (3.65) vidíme, že průměty vektoru $z_k(t)$ ^{na reálnou} (3.69) a imaginární osu jsou spolu vázány Hilbertovou transformací.

Přiřadíme-li každé složce $r_k(t)$ signálu $S(t)$ Hilbertovou transformací složku $x_k(t)$, vytvoříme tzv. přiřazený (adjungovaný) signál $\hat{S}(t)$ k signálu $S(t)$

$$\hat{S}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega_0 t - b_k \cos k\omega_0 t) \quad (3.71)$$

Signály $S(t)$ a $\hat{S}(t)$ pak tvoří reálnou a imaginární část komplexního (vektoru) signálu (viz obr. 3.22)

$$z(t) = A(t) e^{j\psi(t)} = s(t) + j\hat{S}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) + j \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t), \quad (3.72)$$

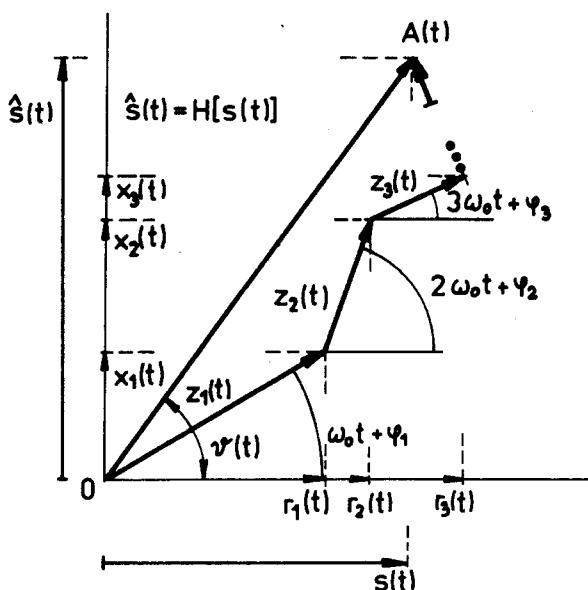
kteřý nazýváme Hilbertovým (také analytickým) signálem.

Potom můžeme signál $S(t)$ zapsat jako (viz obr. 3.22)

$$s(t) = A(t) \cos \psi(t), \quad (3.73)$$

kde

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + \hat{S}^2(t)}, \quad (3.74)$$



Obr. 3.22

$$\frac{d s(t)}{d t} = \frac{d A(t)}{d t} \bigg|_{t=\bar{t}} \quad (3.76)$$

Platí, že

$$\frac{d s(t)}{d t} = \frac{d}{d t} [A(t) \cos \varphi(t)] = \frac{d A(t)}{d t} \cos \varphi(t) - A(t) \sin \varphi(t) \frac{d \varphi(t)}{d t} \quad (3.77)$$

Aby pro (3.73) bylo v $\bar{t}$ splněno $s(\bar{t}) = A(\bar{t})$, musí být $\varphi(\bar{t}) = 2n\pi$, což po dosazení do (3.77) dá žádaný vztah (3.76). Vyjádříme-li $s(t)$ pomocí (3.73), (3.74), (3.75), má obálka $A(t)$ tečný dotyk $s(t)$. V bodě dotyku $\hat{s}(t) = 0$.

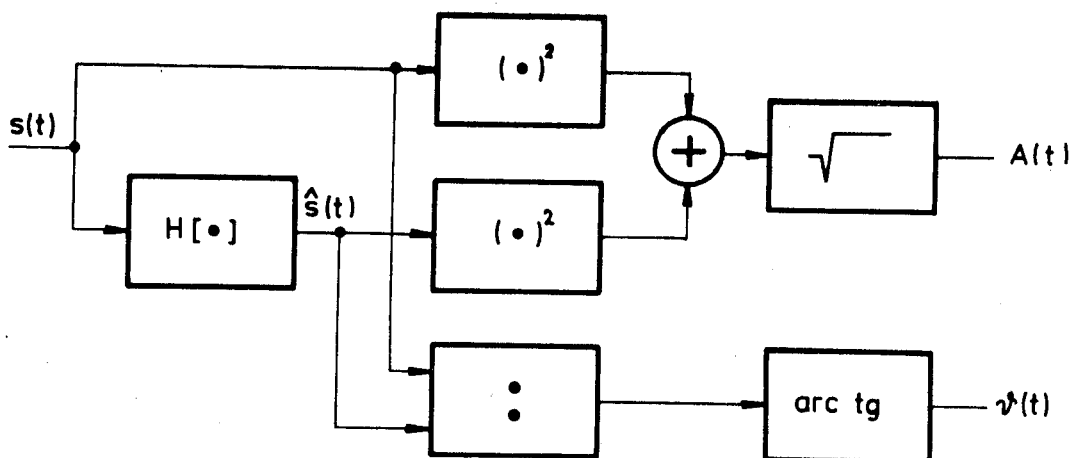
Uvedené vztahy jsme odvodili pro periodický signál. Pro obecný signál budou rovněž platit, popsaný postup by bylo nutné použít na přechod od Fourierovy řady k Fourierově transformaci.

Poznamenejme ještě, že obálku signálu získáváme při demodulaci signálu. Jeden z algoritmů získání obálky a fáze signálu je na obr. 3.23.

3.7.3 Spektrum Hilbertova signálu

Hledejme nejprve spektrum přidruženého signálu. Je-li $s(t) \longleftrightarrow S(\omega)$ a hledáme $\hat{s}(\omega) \longleftrightarrow \hat{s}(t)$, je

$$\hat{s}(\omega) = F[\hat{s}(t)] = \begin{cases} -jS(\omega) & \omega > 0, \\ 0 & \omega = 0, \\ +jS(\omega) & \omega < 0. \end{cases} \quad (3.78)$$



Obr. 3.23

Hledáme-li potom spektrum Hilbertova signálu, dostaneme

$$Z(\omega) = F[z(t)] = F[s(t)] + jF[\hat{S}(t)] = S(\omega) + j\hat{S}(\omega)$$

a tedy

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2 S(\omega) & \omega > 0, \\ S(\omega) & \omega = 0, \\ 0 & \omega < 0. \end{cases} \quad (3.79)$$

Je tedy zřejmé, že spektrum Hilbertova signálu odpovídá jednostrannému (skutečnému - technickému) spektru signálu $S(t)$ (srovnej (2.32) a odst. 3.3).

4. DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Vyjádření signálu v kmitočtové oblasti způsoby, které jsme uvedli, je možné za dvou podmínek:

- 1) signál $S(t)$ je popsán explicitním matematickým výrazem,
- 2) umíme určit primitivní funkci nebo přímo určitý integrál k integrandu typu $s(t)e^{j\omega t}$.

V praxi se problém řeší pomocí tabulek a slovníků Fourierovy transformace [16].

Ve většině prakticky se vyskytujících případů je třeba vypočítat Fourierovu transformaci numericky. Lze rozlišit dva případy [11]:

- 1) Není známo matematické vyjádření pro signál $S(t)$, ale jsou známy jen jeho některé hodnoty $S(t_i)$ v okamžicích t_i . To je nejčastější případ, když hodnoty $S(t_i)$ získáváme měřením.
- 2) Pro signál $S(t)$ je známo matematické vyjádření, ale neumíme určit primitivní funkci. Potom můžeme pro všechna t_i vypočítat $S(t_i)$ a převést problém na předcházející případ.

Numerické metody výpočtu Fourierovy transformace lze rozdělit do dvou skupin a to podle toho, zda signál $s(t)$ musí být zadán v bodech

- 1) ekvidistantních,
- 2) neekvidistantních.

Nejvíce rozšířené jsou metody používající ekvidistanční krok. Metody používající neekvidistanční krok mají přednost v tom, že u nich lze délku kroku přizpůsobit rychlosti změn signálu.

V poslední době se nejvíce rozšířily metody s ekvidistančním krokem a to jednak proto, že hodnoty signálů bývají získávány **automatickými** měřicími zařízeními pracujícími s pevným krokem, jednak proto, že využívají velmi efektivní algoritmus, tzv. rychlou Fourierovu transformaci.

Uvedené numerické metody, známé jako diskrétní Fourierova transformace, našly velké uplatnění zejména s rozvojem **výpočetní techniky**. Součástí řady přístrojů bývají jednoduše procesory realizující tuto transformaci. Diskrétní transformace je poměrně nová, vznikla v šedesátých letech a její hlavní rozvoj nastal až po roce 1965, kdy J.W. Cooley a J.W. Tukey popsali zmíněnou rychlou Fourierovu transformaci (FFT - Fast Fourier Transform). Díky tomuto algoritmu se stala diskrétní Fourierova transformace nejrozšířenějším prostředkem pro numerický výpočet Fourierovy transformace a pro numerickou harmonickou analýzu signálů. Připomeňme, že se dnes vyrábějí kapesní kalkulačky, na nichž je algoritmus FFT implementován.

Považujeme proto za nutné se zabývat principem, základními vlastnostmi a postupem diskrétní Fourierovy transformace. Je však třeba čtenáři připomenout, že v řadě případů může být účelnější použití jiných numerických metod než je diskrétní Fourierova transformace. Jejich přehled lze nalézt v knize [11] a v literatuře tam uvedené.

4.1 PRINCIP A ZÁKLADNÍ VZTAHY

Předpokládejme, že máme periodický signál

$$s_p(t) = s_p(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

s periodou T , který můžeme vyjádřit komplexní Fourierovou řadou podle (2.25) a (2.26)

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn(2\pi/T)t} \quad (4.1)$$

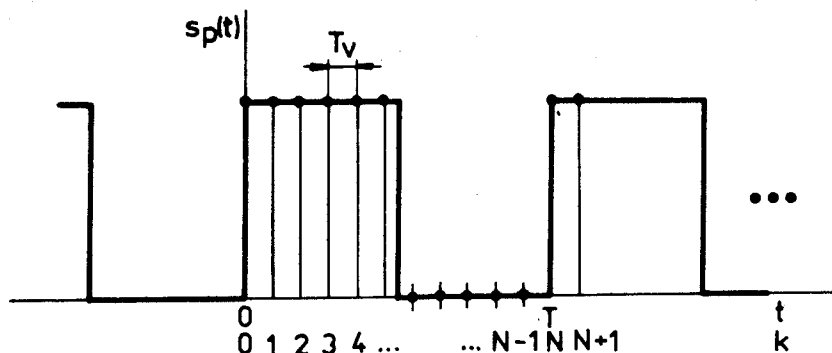
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T s_p(t) e^{-jn(2\pi/T)t} dt \quad (4.2)$$

Periodický signál budeme ekvidistančně vzorkovat s periodou T . tak, že

budeme odebírat N vzorků v periodě T (obr. 4.1).
Hodnota signálu v okamžicích vzorkování

$$t = k T_v = k \frac{T}{N} \quad (4.3)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn(2\pi/N)k}$$



Obr. 4.1

Označme

$$s_p(k \frac{T}{N}) = s_{pk}(k)$$

Exponenciály $e^{jn(2\pi/N)k}$ představují harmonické vzorkované signály s kmitočty $(2\pi/N)n$. Velikost k odpovídá času - udává pořadové číslo odebraného vzorku. Exponenciály jsou periodické. V důsledku periodicity vůči proměnné n platí pro $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$e^{j(n \pm mN)(2\pi/N)k} = e^{jn(2\pi/N)k} e^{\pm j2\pi mk} = e^{jn(2\pi/N)k}$$

Potom můžeme v důsledku periodicity psát

$$s_{pk}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{jn(2\pi/N)k}, \quad (4.4)$$

kde

$$C_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n+mN} \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.5)$$

Výraz (4.4) rozšíříme

N a dostaneme

$$s(k) = \frac{N}{N} s_{pk}(k),$$

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{jn(2\pi/N)k}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.6)$$

kde

$$S(n) = N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n+mN}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.7)$$

Dále se pokusíme $S(n)$ vyjádřit pomocí $s(k)$. Výraz (4.6) násobíme a

sumujeme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-jm(2\pi/N)k} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{jn(2\pi/N)k} e^{-jm(2\pi/N)k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j(n-m)(2\pi/N)k} . \end{aligned}$$

V posledním výrazu zaměňme pořadí sumování a hledejme hodnotu výrazu

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(n-m)(2\pi/N)k} .$$

Pro $n = m$ je jeho hodnota rovna N . Je-li $n \neq m$, jde o součet geometrické řady s N členy. Hodnota součtu je

$$1. \frac{1 - e^{j(n-m)(2\pi/N)N}}{1 - e^{j(2\pi/N)(n-m)}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{j(2\pi/N)(n-m)}} = 0 ,$$

tzn., že

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(n-m)(2\pi/N)k} = \begin{cases} N & ; \quad n = m \\ 0 & ; \quad n \neq m \end{cases} \quad (4.8)$$

a potom

$$\sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-jm(2\pi/N)k} = \frac{1}{N} N \sum_{n=0}^{N-1} S(n) \delta_{n,m} ; \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\delta_{n,m}$ je Kroneckerovo delta

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m, \\ 1 & ; \quad n = m. \end{cases}$$

Pravá strana posledního výrazu je pro $n = m$ rovna $S(n)$, pro $n \neq m$ je nulová a tedy

$$\boxed{S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-jn(2\pi/N)k} ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1} \quad (4.9)$$

Vztah (4.6) představuje rozvoj posloupnosti vzorků periodického signálu do řady diskretních exponenciál

$$\left\{ e^{jn(2\pi/N)k} \right\}_{n=0}^{N-1} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

vážených hodnotami koeficientů $S(n)$ podle (4.9). Vztah (4.9) pro výpočet těchto koeficientů nazýváme přímou diskretní Fourierovou transformací (dále v této ka-

pitole DFT) a značíme

$$S(n) = \text{DFT} [\{s(k)\}] ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Z hodnot $S(n)$ můžeme vypočítat, jak jsme ukázali, hodnoty $s(k)$ podle vztahu (4.6). Tento vztah nazýváme inverzní DFT a budeme značit

$$s(k) = \text{DFT}^{-1} [\{S(n)\}] ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Definiční vztahy (4.6) a (4.9) vyjadřují jednoznačné přiřazení obou posloupností. Posloupnosti $s(k)$ $k = 0, 1, \dots, N-1$ odpovídá konečná posloupnost $S(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Všimneme-li si vztahu (4.7), kterého jsme použili, je zřejmé, že

$$S(n) = S(n + pN) , \quad \begin{matrix} p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{matrix} \quad (4.10)$$

a tedy DFT přiřazuje konečné posloupnosti vzorků také obraz, který je nekonečnou periodickou posloupností. Naopak konečné posloupnosti $S(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, která je obrazem konečného počtu vzorků, odpovídá i nekonečná periodická posloupnost vzorků

$$s(k) = s(k + pN) ; \quad \begin{matrix} p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ k = 0, 1, \dots, N-1. \end{matrix} \quad (4.11)$$

Lze tedy DFT považovat za oboustranně jednoznačnou a to buď jako přiřazení mezi posloupnostmi konečnými na základním intervalu periodicity, nebo jako přiřazení nekonečných periodických posloupností.

Posloupnosti budeme podle potřeby značit několika způsoby:

1) prvkem a hodnotami, jichž může index nabýt, např.

$$s(k) , \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

2) prvkem ve složených závorkách s mezemi změny indexů, např.

$$\left\{ s(k) \right\}_{k=0}^{N-1}$$

3) pokud nemůže dojít k chybě, jen prvkem ve složených závorkách, např.

$$\left\{ s(k) \right\}_k \text{ nebo } \left\{ s(k) \right\}.$$

Uvedené označení jsou rovnocenná.

4.2 VZTAH MEZI FOURIEROVOU ŘADOU, FOURIEROVOU TRANSFORMACÍ A DISKRÉTNÍ FOURIEROVOU TRANSFORMACÍ

Diskrétní Fourierovu transformaci jsme zavedli jako transformaci vzorků periodického signálu. Často však použijeme transformaci (4.9) na konečnou posloupnost vzorků finitního signálu. Signál tak vlastně periodizujeme. Vzniká otázka, v jakém vztahu je spektrum finitního signálu k takto získané DFT.

Mějme tři signály (obr. 4.2)

- 1) finitní signál $s_f(t)$, který má vně intervalu $\langle 0, T \rangle$ nulové hodnoty,
- 2) periodický signál $s_p(t)$ vzniklý periodizací $s_f(t)$,
- 3) diskrétní signál $s_d(k) = s_f(kT/N)$, $k=0, 1, \dots, N-1$, vzniklý diskretizací signálu $s_f(t)$.

Transformacemi odpovídajícími povaze signálů dostaneme tyto výsledky:

1) Fourierovou transformací signálu $S_f(t)$ spektrum

$$S_f(\omega) = F[S_f(t)]. \quad (4.12)$$

2) Koeficienty komplexní Fourierovy řady pro periodický signál $S_p(t)$ získáme z průběhu $S_f(t)$ v jedné periodě

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T S_f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Podle odstavce 3.3 lze tyto koeficienty vyjádřit vztahem (3.33)

$$c_n = \frac{S_f(n\omega_0)}{T} \quad (4.13)$$

pomocí spektra finitního signálu odpovídajícího jedné periodě signálu periodického.

3) Diskrétní Fourierovu transformaci

$$S_d(n) = \text{DFT}[\{s_d(k)\}] \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.14)$$

Podle (4.7) platí

$$S_d(n) = N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n+mN} \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.15)$$

tj. n -tý vzorek spektra DFT odpovídá N násobku n -tého koeficientu

c_n komplexní Fourierovy řady, k němuž jsme přičetli všechny koeficienty s indexy lišícími se o násobky N . Dosadíme-li do (4.15) (4.13), můžeme také psát

$$S_d(n) = \frac{N}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_f((n+mN)\omega_0),$$

kde

$$T = N T_V.$$

Potom

$$S_d(n) = \frac{1}{T_V} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_f((n+mN)\omega_0) \quad (4.16)$$

Z uvedeného je zřejmá interpretace DFT:

1) Jestliže vzorkovaný signál $S_d(k)$ odpovídá průběhu jedné periody periodického signálu, který je dostatečně hladký, takže koeficienty jeho komplexní Fourierovy řady podle (2.35) rychle klesají a můžeme napsat

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n+mN} \doteq c_n,$$

platí pro ně přibližně podle (4.15)

$$c_n \doteq \frac{1}{N} \text{DFT}[\{s_d(k)\}]. \quad (4.17)$$

2) Jestliže hodnoty vzorkovaného signálu jsou

$$s_d(k) = s_f(k T_V)$$

a signál $s_f(t)$ je dostatečně hladký, takže jeho spektrum podle (3.35) rychle klesá a můžeme napsat

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_f((n+mN) \frac{2\pi}{T}) \doteq S_f(n \frac{2\pi}{T})$$

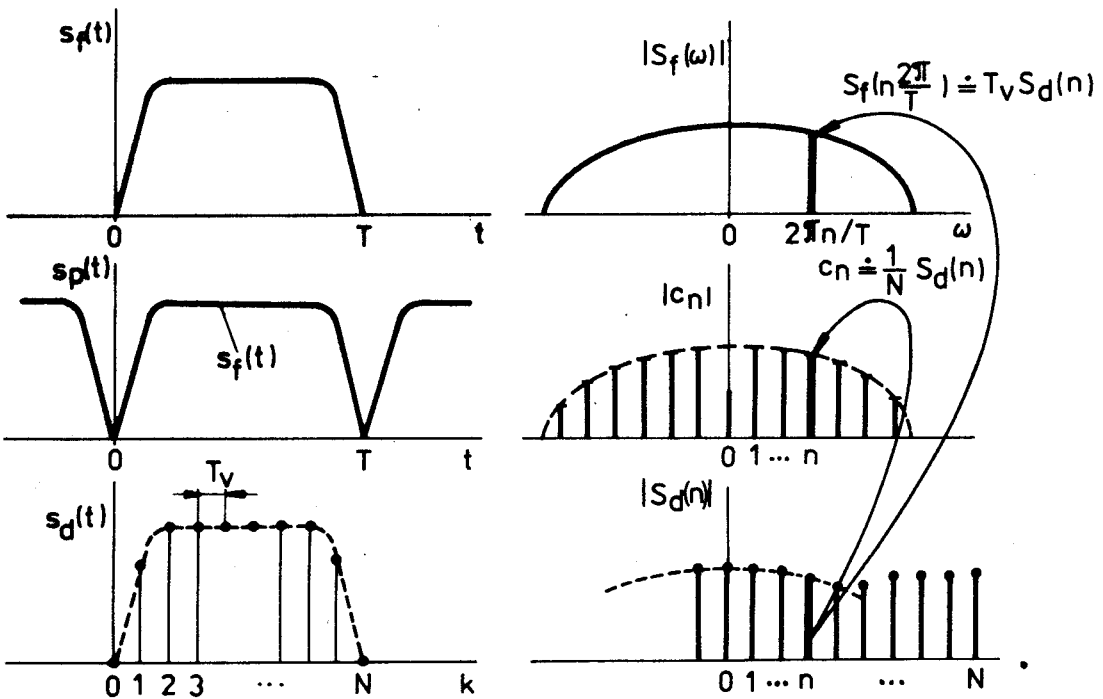
platí přibližně pro spektrum signálu $S_f(\omega)$

$$S_f(n \frac{2\pi}{NT_V}) \doteq T_V \cdot \text{DFT} [\{s_d(k)\}] \quad (4.18)$$

kde T_V je perioda vzorkování, N počet odebraných vzorků (viz obr. 4.2).

Je třeba poznamenat, že vztahy (4.17) a (4.18) platí jen pro $n \leq N/2$, jak vyplývá ze vztahů (4.36) a (4.37) uvedených dále.

Jestliže signál není dostatečně hladký a spektrum klesá s kmitočtem pomalu, nelze o vzájemném vztahu spektra a DFT říci nic jiného, než že platí vztahy (4.15) a (4.16).



Obr. 4.2

4.3 MATICOVÝ ZÁPIS DFT

Označme

$$W = e^{-j(2\pi/N)} \quad (4.19)$$

a z mocnin (4.19) sestavme matici řádu N

$$[W] = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

pro jejíž obecný prvek na i -tém řádku a v k -tém sloupci platí

$$W_{ik} = W^{ik}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Posloupnost vzorků signálu můžeme zapsat jako sloupcový vektor $[S]$

$$^T[S] = (s(0), s(1), \dots, s(N-1))$$

a její DFT také jako sloupcový vektor $[S]$

$$^T[S] = (S(0), S(1), \dots, S(N-1)).$$

Potom výraz pro přímou DFT můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$[S] = [W][s]. \quad (4.21)$$

Zpětnou DFT můžeme rovněž zapsat v maticovém tvaru

$$[s] = [W]^{-1}[S], \quad (4.22)$$

kde $[W]^{-1}$ je matice inverzní k matici $[W]$.

Matice $[W]$ má řadu vlastností, které zájemce nalezne v [11].

4.4 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI DFT

Pro DFT platí řada vět [11], z nichž nejzákladnější uvedeme:

1. Věta o linearitě DFT

Přímo z definice DFT plyne

$$\text{DFT} \left[\sum_i a_i \{ s_i(k) \} \right] = \sum_i a_i \text{DFT} \left[\{ s_i(k) \} \right] \quad (4.23)$$

2. Věta o periodicitě

Jak již bylo uvedeno, plyne přímo z definičních vztahů, že DFT a inverzní DFT definují periodické posloupnosti

$$s(k) = s(k + mN), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.24)$$

$$S(n) = S(n + mN) \quad (4.25)$$

Jako zvláštní případ dostaneme pro záporné indexy

$$s(-k) = s(N-k) \quad (4.26)$$

$$S(-n) = S(N-n) \quad (4.27)$$

3. Věta o obrazu obrácené posloupnosti

Jako obrácenou posloupnost k posloupnosti $\{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\}$ definujeme $\{s(0), s(N-1), s(N-2), \dots, s(2), s(1)\}$.

V důsledku periodicity (4.24) a (4.26) můžeme obrácenou posloupnost k posloupnosti $\{s(k)\}_{k=0}^{N-1}$ zapsat jako

$$\{s(N), s(N-1), \dots, s(2), s(1)\} = \{s(N-i)\}_{i=0}^{N-1} = \{s(-k)\}_{k=0}^{N-1}. \quad (4.28)$$

Potom DFT obrácené posloupnosti

$$\begin{aligned} \text{DFT} \left[\{s(-k)\}_{k=0}^{N-1} \right] &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} s(-k) e^{jkn2\pi/N} \right\}_{n=0}^{N-1} = \\ &= \left\{ \sum_{m=1}^N s(m) e^{j(N-m)n2\pi/N} \right\}_{n=0}^{N-1} = \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{jm(-n)2\pi/N} \right\}_{n=0}^{N-1} = \\ &= \left\{ S(-n) \right\}_{n=0}^{N-1} \end{aligned}$$

je rovna převrácenému obrazu původní posloupnosti.

Totéž platí pro inverzní DFT, tedy

$$\text{DFT} \left[\{s(-k)\}_{k=0}^{N-1} \right] = \{S(-n)\}_{n=0}^{N-1} = \{S(N-i)\}_{i=0}^{N-1}, \quad (4.29)$$

$$\text{DFT}^{-1} \left[\{S(-n)\}_{n=0}^{N-1} \right] = \{s(-k)\}_{k=0}^{N-1}. \quad (4.30)$$

4. Věta o DFT sudé a liché posloupnosti

Posloupnost, pro kterou

$$s(i) = s(-i) = s(N-i),$$

nazýváme sudá posloupnost.

Pro sudou posloupnost tedy platí

$$\{s(i)\}_{i=0}^{N-1} = \{s(-i)\}_{i=0}^{N-1} \quad (4.31)$$

a její DFT

$$\text{DFT} \left[\left\{ s(i) \right\}_{i=0}^{N-1} \right] = \text{DFT} \left[\left\{ s(-i) \right\}_{i=0}^{N-1} \right]$$

vzhledem k (4.29) dá

$$\left\{ S(n) \right\}_{n=0}^{N-1} = \left\{ S(-n) \right\}_{n=0}^{N-1},$$

což odpovídá definici (4.31) sudé posloupnosti.

Z uvedeného plyne, že DFT sudé posloupnosti je sudá. Podobně DFT liché posloupnosti je lichá.

5. Věta o DFT komplexně sdružené posloupnosti

Obecně mohou být vzorky $s(k)$ komplexní čísla. Pak DFT komplexně sdružené posloupnosti

$$\begin{aligned} \text{DFT} \left[\left\{ s^*(k) \right\} \right] &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} s^*(k) e^{-jn(2\pi/N)k} \right\}_n = \left\{ \sum_k s(k) e^{jn(2\pi/N)k} \right\}^* = \\ &= \left\{ \sum_k s(k) e^{-j(-n)(2\pi/N)k} \right\}^* = \left\{ S^*(-n) \right\}_{n=0}^{N-1}. \end{aligned}$$

Z toho a z (4.29)

$$\text{DFT} \left[\left\{ s^*(-k) \right\}_{k=0}^{N-1} \right] = \left\{ S^*(n) \right\}_{n=0}^{N-1}$$

a tedy

$$\text{DFT}^{-1} \left[\left\{ S^*(n) \right\}_{n=0}^{N-1} \right] = \left\{ s^*(-k) \right\}_{k=0}^{N-1}.$$

DFT komplexně sdružené posloupnosti je komplexně sdružená obrácená DFT posloupnosti původní. Totéž platí pro inverzní DFT:

$$\text{DFT} \left[\left\{ s^*(k) \right\}_{k=0}^{N-1} \right] = \left\{ S^*(-n) \right\}_{n=0}^{N-1}, \quad (4.32)$$

$$\text{DFT}^{-1} \left[\left\{ S^*(n) \right\}_{n=0}^{N-1} \right] = \left\{ s^*(-k) \right\}_{k=0}^{N-1}. \quad (4.33)$$

6. Věta o DFT reálného signálu

Je-li signál posloupností reálných čísel, pak pro všechna k

$$s(k) = s^*(k)$$

a tudíž

$$\text{DFT} \left[\left\{ s(k) \right\} \right] = \text{DFT} \left[\left\{ s^*(k) \right\} \right],$$

což vzhledem k (4.32) znamená

a tedy

$$\{S(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{S^*(-n)\}_{n=0}^{N-1} = \{S^*(N-n)\}_{n=0}^{N-1}$$

$$\{\operatorname{Re} S(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{\operatorname{Re} S(N-n)\}_{n=0}^{N-1} \quad (4.34)$$

$$\{\operatorname{Im} S(n)\}_{n=0}^{N-1} = -\{\operatorname{Im} S(N-n)\}_{n=0}^{N-1} \quad (4.35)$$

Ze (4.34) a (4.35) plyne

$$\{|S(n)|\}_{n=0}^{N-1} = \{|S(N-n)|\}_{n=0}^{N-1} \quad (4.36)$$

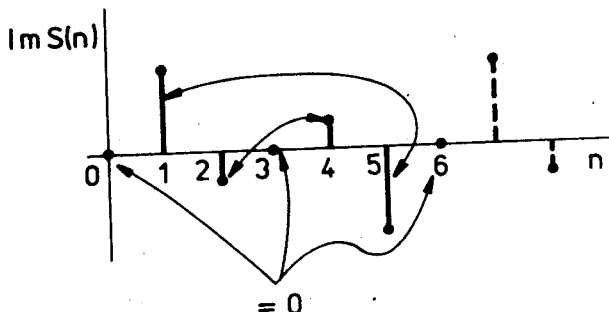
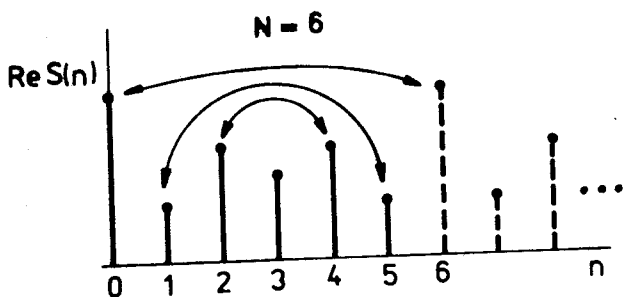
$$\{\arg S(n)\}_{n=0}^{N-1} = -\{\arg S(N-n)\}_{n=0}^{N-1} \quad (4.37)$$

DFT reálného signálu je posloupnost komplexních čísel. Jejich reálné části jsou sudou, imaginární části lichou posloupností. Moduly jsou sudou, argumenty lichou posloupností.

Důsledkem této věty je, že prvek $S(0)$ je vždy reálný, protože

$$S(0) = S(N) = S^*(N).$$

Je-li N sudé, pak i střední ($N/2$ -tý) prvek obrazu je reálný, protože podle (4.32) pro reálný signál je $S(N/2) = S^*(-N/2) = S^*(N/2)$.



Z věty plyne, že
při sudém $N = 2k$
i lichém $N = 2k+1$
stačí zjistit $k+1$ prvků
posloupnosti obrazu. Další
se opakují. Situace je
znázorněna na obr. 4.3.

Obr. 4.3

7. Věta o DFT posunuté posloupnosti

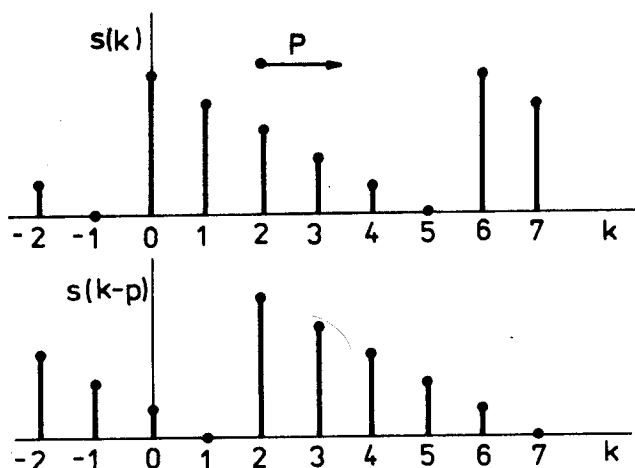
Známe obraz

$$\text{DFT}[\{s(k)\}_k] = \{S(n)\}_n$$

a potřebujeme určit obraz posunuté posloupnosti

$$\begin{aligned} \text{DFT}[\{s(k-p)\}_k] &= \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} s(k-p) e^{-jkn2\pi/N} \right\}_n = \end{aligned}$$

$$= |k-p=i| =$$



Obr. 4.4

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sum_{i=-p}^{N-1-p} s(i) e^{-j(i+p)n2\pi/N} \right\}_n = \left\{ \sum_{i=-p}^{N-1-p} s(i) e^{-jin2\pi/N} \cdot e^{-jpn2\pi/N} \right\}_n = \\ &= \left\{ \sum_{i=-p}^{i=-1} \dots + \sum_{i=0}^{N-1-p} \dots \right\}_n. \end{aligned}$$

Prvá suma je

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{i=-p}^{-1} s(i) e^{-jin2\pi/N} \cdot e^{-jpn2\pi/N} \right\}_n = |q=N+i| = \\ &= \left\{ \sum_{q=N-p}^{N-1} \frac{s(q-N)}{s(q)} \cdot \frac{e^{-jn(q-N)2\pi/N}}{e^{-jqn2\pi/N}} \cdot e^{-jpn2\pi/N} \right\}_n \end{aligned}$$

a tedy

$$\text{DFT}[\{s(k-p)\}_k] = \sum_{q=N-p}^{N-1} \dots + \sum_{i=0}^{N-1-p} \dots$$

tj.

$$\text{DFT}[\{s(k-p)\}_k] = \left\{ \sum_{q=0}^{N-1} s(q) e^{-jqn2\pi/N} e^{-jpn2\pi/N} \right\}_n.$$

Obraz posloupnosti posunuté o p kroků je

$$\text{DFT}[\{s(k-p)\}_k] = \{S(n) e^{-jpn2\pi/N}\}_n.$$

(4.38)

8. Věta o posunutí v obrazu

Stejným postupem jako v předcházejícím případě určíme

$$\begin{aligned} \text{DFT}^{-1} \left[\left\{ S(n-p) \right\}_n \right] &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n-p) e^{jnk 2\pi/N} \right\}_k = \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S(m) e^{jmk 2\pi/N} \cdot e^{jpk 2\pi/N} \right\}_k, \end{aligned}$$

tj.

$$\text{DFT}^{-1} \left[\left\{ S(n-p) \right\}_n \right] = \left\{ s(k) e^{jpk 2\pi/N} \right\}_k. \quad (4.39)$$

9. Věta o obrazu diskrétní periodické konvoluce

Periodickou konvolucí signálů $\{x(i)\}$ a $\{y(i)\}$ rozumíme posloupnost $\{v(k)\}$, jejíž členy určíme podle vztahu

$$\begin{aligned} v(k) &= \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) x(k-i) = x * y(k) \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Postup vytváření diskrétní periodické konvoluce je znázorněn na obr. 4.5. Nalezneme její DFT

$$\begin{aligned} \text{DFT} \left[\left\{ v(k) \right\}_k \right] &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(k-i) e^{-jkn 2\pi/N} \right\}_n = \\ &= \left\{ \sum_i x(i) \sum_k y(k-i) e^{-jkn 2\pi/N} \right\}_n = \left\{ \sum_i x(i) Y(n) e^{jin 2\pi/N} \right\}_n = \\ &= \left\{ X(n) \cdot Y(n) \right\}_n. \end{aligned}$$

DFT diskrétní periodické konvoluce je roven součinu DFT jednotlivých posloupností

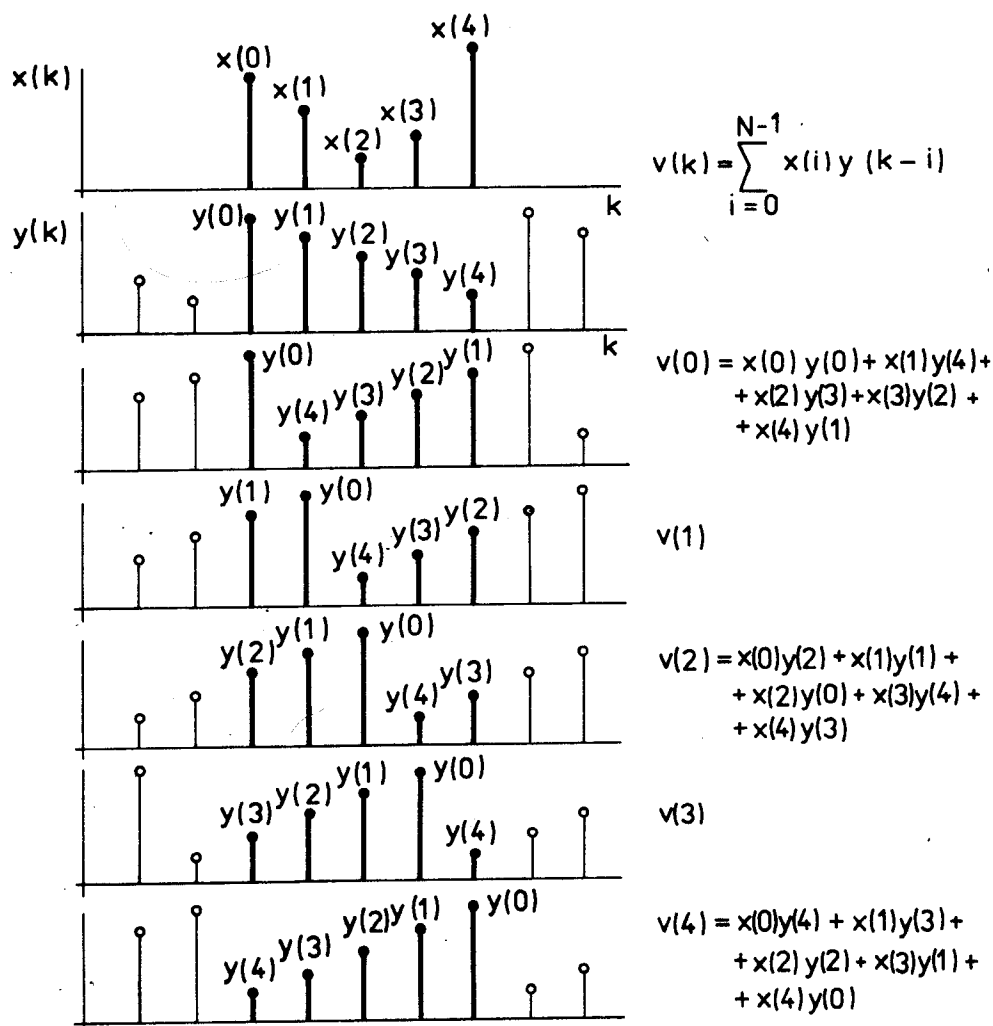
$$\text{DFT} \left[\left\{ x * y(k) \right\}_k \right] = \left\{ X(n) \cdot Y(n) \right\}_n. \quad (4.41)$$

10. Věta o obrazu diskrétní periodické korelace

Diskrétní periodickou korelací posloupností $\{x_1(i)\}$ a $\{x_2(i)\}$ nazýváme posloupnost $\{R_{12}(k)\}$ se členy

$$R_{12}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2(i+k); \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.42)$$

Jsou-li posloupnosti stejné $\{x_1(i)\} = \{x_2(i)\} = \{x(i)\}$, dostaneme tzv. diskrétní periodickou autokorelaci



Obr. 4.5

$$R(k) = \sum_{i=1}^{N-1} x(i) x(i+k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.43)$$

DFT periodické korelace je

$$\begin{aligned} \text{DFT} \left[\left\{ R_2(k) \right\}_k \right] &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2(i+k) \cdot e^{-jkn2\pi/N} \right\}_n = \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) X_2(n) e^{jin2\pi/N} \right\}_n = \left\{ X_1(-n) X_2(n) \right\}_n. \end{aligned}$$

DFT periodické korelace $\left\{ R_2(k) \right\}_k$ posloupností $\left\{ x_1(i) \right\}_i$ a $\left\{ x_2(i) \right\}_i$ je rovna součinu obrácené DFT první posloupnosti s DFT druhé posloupnosti, tj.

$$\text{DFT} \left[\left\{ R_{12}(k) \right\}_k \right] = \left\{ X_1(-n) X_2(n) \right\}_n, \quad (4.44)$$

kde

$$\text{DFT} \left[\left\{ x_1(i) \right\}_i \right] = \left\{ X_1(n) \right\}_n,$$

$$\text{DFT} \left[\left\{ x_2(i) \right\}_i \right] = \left\{ X_2(n) \right\}_n.$$

Z (4.44) vyplývá, že pro DFT periodické autokorelace platí

$$\text{DFT} \left[\left\{ R(k) \right\}_k \right] = \left\{ X(n) \cdot X(-n) \right\}_n \quad (4.45)$$

a je-li posloupnost reálná, pak

$$\text{DFT} \left[\left\{ R(k) \right\}_k \right] = \left\{ |X(n)|^2 \right\}_n. \quad (4.46)$$

11. Věta o prodloužení posloupnosti doplněním nulami

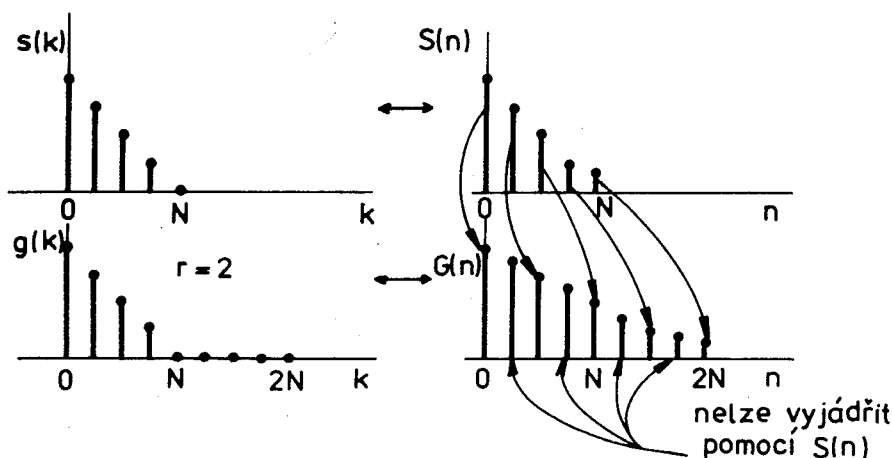
Máme posloupnost $\left\{ s(k) \right\}_{k=0}^{N-1}$, kterou uměle prodloužíme doplněním nulových členů na posloupnost $\left\{ g(k) \right\}_{k=0}^{rN-1}$

$$g(k) = \begin{cases} s(k) & ; \quad k \in \langle 0, N-1 \rangle \\ 0 & ; \quad k \in \langle N, rN-1 \rangle, \quad r \text{ celé.} \end{cases}$$

Potom

$$\begin{aligned} \text{DFT} \left[\left\{ g(k) \right\}_{k=0}^{rN-1} \right] &= \left\{ \sum_{k=0}^{rN-1} g(k) e^{-jnk 2\pi/(rN)} \right\}_{n=0}^{rN-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{-jk 2\pi/(rN)} \right\}_{n=0}^{rN-1} = \\ &= \left\{ G(n) \right\}_{n=0}^{rN-1}. \end{aligned}$$

DFT posloupnosti prodloužené nulami na r -násobnou délku je posloupnost s rN členy, z nichž každý r -tý je roven členu DFT původní posloupnosti.



Obr. 4.6

$$\left. \begin{aligned} \text{DFT} \left[\left\{ g(k) \right\}_{k=0}^{rN-1} \right] &= \left\{ G(n) \right\}_{n=0}^{rN-1} , \\ G(n) &= S\left(\frac{n}{r}\right) \quad , \quad \text{když } n/r \text{ je celé} , \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

viz obr. 4.6.

12. Věta o prodloužení posloupnosti opakováním

Posloupnost $\left\{ s(k) \right\}_{k=0}^{N-1}$ prodloužíme tak, že ji r -krát zopakujeme a dostaneme tak

$$h(k) = s(k \bmod N) \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, rN-1.$$

DFT takto prodloužené posloupnosti je

$$\begin{aligned} \text{DFT} \left[\left\{ h(k) \right\}_{k=0}^{rN-1} \right] &= \left\{ \sum_{k=0}^{rN-1} h(k) \bar{e}^{jnk2\pi/(rN)} \right\}_{n=0}^{rN-1} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \cdot \sum_{q=0}^{r-1} \bar{e}^{j(2\pi/(rN))(k+qN)n} \right\}_{n=0}^{rN-1} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \cdot \bar{e}^{jkn2\pi/(rN)} \cdot \sum_{q=0}^{r-1} \bar{e}^{jqn2\pi/r} \right\}_{n=0}^{rN-1} . \end{aligned}$$

Druhá suma je

$$\sum_{q=0}^{r-1} \bar{e}^{jqn2\pi/r} = \begin{cases} \sum_{q=0}^{r-1} 1 = r & ; \quad n/r \text{ celé,} \\ \frac{1 - \bar{e}^{jqn2\pi}}{1 - \bar{e}^{jqn2\pi/r}} = 0 & ; \quad n/r \text{ není celé,} \end{cases}$$

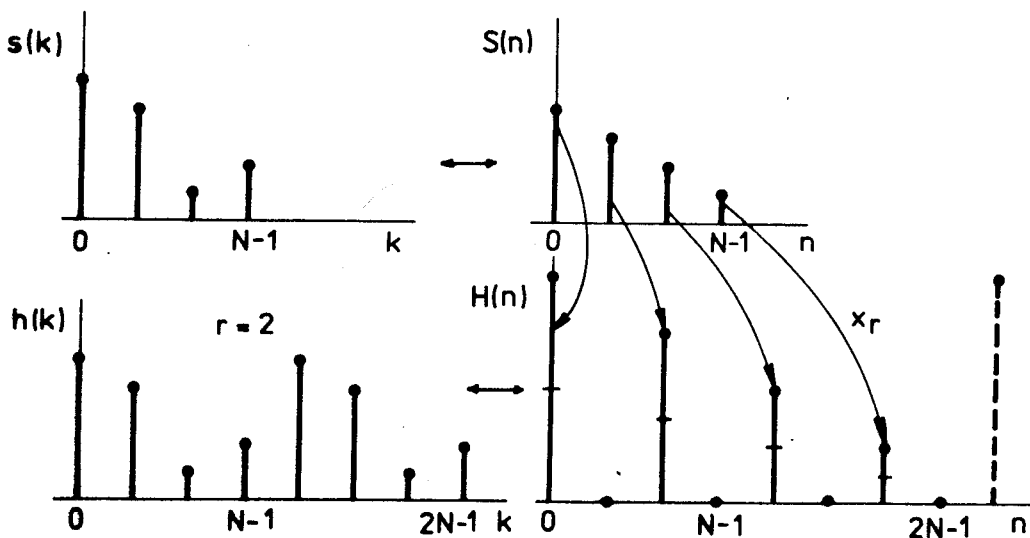
a potom

$$\text{DFT} \left[\left\{ h(k) \right\}_{k=0}^{rN-1} \right] = \begin{cases} \left\{ r \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \bar{e}^{jkn2\pi/(rN)} \right\}_{n=0}^{rN-1} & ; \quad \frac{n}{r} \text{ celé,} \\ 0 & ; \quad \frac{n}{r} \text{ není celé,} \end{cases}$$

DFT posloupnosti prodloužené r -násobným opakováním je posloupnost s rN členy. Každý r -tý člen je roven r -násobku odpovídajícího členu původní DFT; ostatní členy jsou nulové, tj.

$$\text{DFT} \left[\left\{ s(k \bmod N) \right\}_{k=0}^{rN-1} \right] = \begin{cases} \left\{ rS\left(\frac{n}{r}\right) \right\}_{n=0}^{rN-1} & \text{; } n/r \text{ celé,} \\ 0 & \text{; } n/r \text{ není celé,} \end{cases} \quad (4.48)$$

viz obr. 4.7.



Obr. 4.7

Uvedli jsme zde jen nejdůležitější věty shrnující hlavní vlastnosti DFT. Při praktickém používání DFT bude čtenář potřebovat další pravidla, která nalezne v literatuře [17], [17], [18].

4.5 RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Provedení DFT podle vztahu (4.9) vyžaduje pro dané n násobit vzorky signálů hodnotami exponenciály. Uvážíme-li, že hodnotou e^{-j0} není třeba násobit, provede se $n-1$ součinů a výsledky - N členů - se sečtou, tj. provede se $N-1$ součtů. Protože se tyto operace musí provést pro každé n , přičemž opět pro $n = 0$ není třeba násobit, je zřejmé, že je zapotřebí $(N-1)^2$ komplexních součinů a $N(N-1)$ součtů.

Myšlenka rychlé Fourierovy transformace spočívá v tom, že posloupnost vzorků rozdělíme na dvě poloviny a určíme k nim DFT. Potřebujeme pak $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ součinů pro jednu polovinu, tj. celkem $\frac{N^2}{2}$ součinů, což je přibližně polovina původního počtu. Tento postup lze několikrát opakovat. Budeme ho dále označovat jako FFT (Fast - Fourier Transform).

Existují dva základní postupy [17], [18]. Postup s redukcí (někdy se používá termín decimace, který však nepovažujeme za vhodný) času a postup s redukcí kmitočtu.

Dále popíšeme podstatu obou postupů, přičemž budeme předpokládat, že počet vzorků N je mocninou dvou. Existují postupy i pro jiný počet, ty však

přesahují rámec našeho výkladu.

4.5.1 Rychlá Fourierova transformace s redukcí v čase

Podle vztahu (4.9) jsme DFT posloupnosti $s(k)$, $0 \leq k \leq N-1$, N vzorků signálu definovali

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Uvedený vztah v souladu se (4.19) zapíšeme

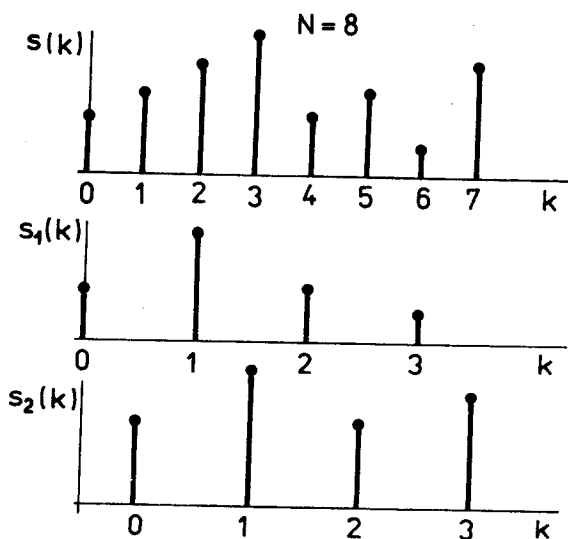
$$\left. \begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k) W_N^{nk}, \\ W &= e^{-j(2\pi/N)} \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Periodičnost W_N^{nk} (s periodou N), tj. $W_N^{(n+mN)(k+pN)} = W_N^{nk}$, $m, p = 0, 1, \dots$ se často zdůrazňuje tím, že se místo W píše W_N .

Je-li N rovno mocnině čísla dvě, můžeme z posloupnosti $\{s(k)\}$ N vzorků signálu sestavit dvě posloupnosti $\{s_1(k)\}$ a $\{s_2(k)\}$ ze sudých a lichých členů $\{s(k)\}$, tj.

$$\left. \begin{aligned} s_1(k) &= s(2k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1, \\ s_2(k) &= s(2k+1), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

V důsledku linearit DFT můžeme psát



Obr. 4.8

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k) W_N^{nk} + \\ &\quad k \text{ sudá} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} s(k) W_N^{nk} = \\ &\quad k \text{ lichá} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k) W_N^{2kn} + \\ &+ \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k+1) W_N^{(2k+1)n}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Dále můžeme psát

$$W_N^2 = [e^{-j(2\pi/N)}]^2 = e^{-j(2\pi/N/2)} = W_{N/2}$$

a tedy z(4.51)

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} s_1(k) W_{N/2}^{kn} + W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} s_2(k) W_{N/2}^{kn}, \quad (4.52)$$

tj.

$$S(n) = S_1(n) + W_N^n S_2(n). \quad (4.53)$$

Zde je třeba připomenout, že $\{s_1(k)\}$ a $\{s_2(k)\}$ ve (4.52) obsahují každá $N/2$ vzorků. Posloupnosti $\{S_1(n)\}$ a $\{S_2(n)\}$ jsou jejich DFT a mají proto každá také jen $N/2$ členů

$$\left\{ S_1(n) \right\}_{n=0}^{N/2} = \text{DFT} \left[\left\{ s_1(k) \right\}_{k=0}^{N/2} \right], \quad (4.54)$$

$$\left\{ S_2(n) \right\}_{n=0}^{N/2} = \text{DFT} \left[\left\{ s_2(k) \right\}_{k=0}^{N/2} \right]. \quad (4.55)$$

Posloupnosti (4.54) a (4.55) jsou periodické s periodou $N/2$ (to je zřejmé z toho, že $W_{N/2}$ ve (4.52) je periodické s periodou $N/2$) a proto nevadí, že ve (4.53) je $n = 0, 1, \dots, N-1$. Nicméně můžeme (4.53) přepsat na dvojici vztahů

$$S(n) = S_1(n) + W_N^n S_2(n) \quad ; \quad 0 \leq n \leq N/2-1, \quad (4.56)$$

$$S(n) = S_1\left(n - \frac{N}{2}\right) + W_N^n S_2\left(n - \frac{N}{2}\right) ; \quad N/2 \leq n \leq N-1. \quad (4.57)$$

Dále upravíme (4.57). Protože

$$W_N^{-N/2} = -1,$$

je

$$W_N^{n-N/2} = -W_N^n$$

a (4.57) přejde na

$$S(n) = S_1\left(n - \frac{N}{2}\right) - W_N^{n-N/2} S_2\left(n - \frac{N}{2}\right) ; \quad N/2 \leq n \leq N-1.$$

Nyní konečně můžeme (4.53) psát jako

$$S(n) = \left\{ \begin{array}{ll} S_1(n) + W_N^n S_2(n) & 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ S_1(n - \frac{N}{2}) - W_N^{n - N/2} S_2(n - \frac{N}{2}), & N/2 \leq n \leq N-1 \end{array} \right\} \quad (4.58)$$

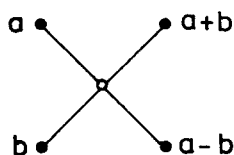
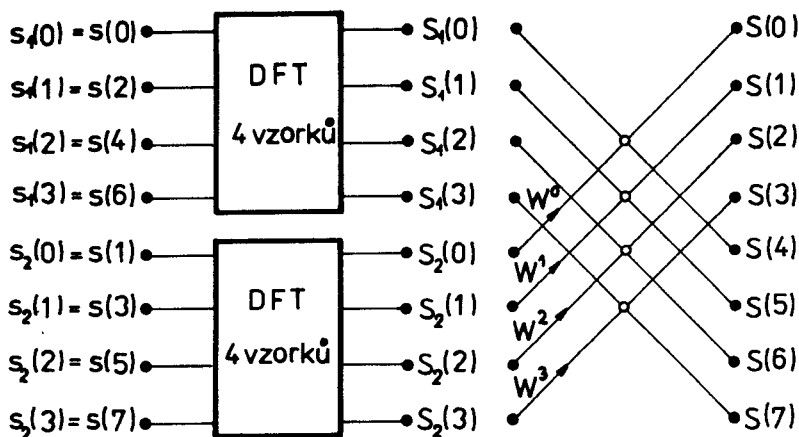
Předpokládejme, že máme 8 vzorků signálu $s(k)$ a podle obrázku 4.8 je rozdělíme na dva signály o 4 vzorcích $S_1(k)$, $S_2(k)$ a určíme jejich DFT $S_1(n)$, $S_2(n)$. Z takto získaných výsledků můžeme určit $S(n)$ podle (4.58); postup je znázorněn orientovaným grafem podle obr. 4.9. Kružnice značí operaci součtu a rozdílu, šipka násobení konstantou nadepsanou nad šipkou.

Je zřejmé, že uvedený postup můžeme opakovat a každou z posloupností $\{S_1(k)\}$ a $\{S_2(k)\}$ rozložit na dvě posloupnosti sudých a lichých členů. Potom pro $S_1(n)$ (a také pro $S_2(n)$) můžeme psát analogicky k (4.58)

$$S_1(n) = \left\{ \begin{array}{ll} A(n) + W_{N/2}^n B(n), & 0 \leq n \leq N/4 - 1 \\ A(n - \frac{N}{4}) - W_{N/2}^{n - N/4} B(n - \frac{N}{4}), & N/4 \leq n \leq N/2 - 1, \end{array} \right.$$

což lze napsat

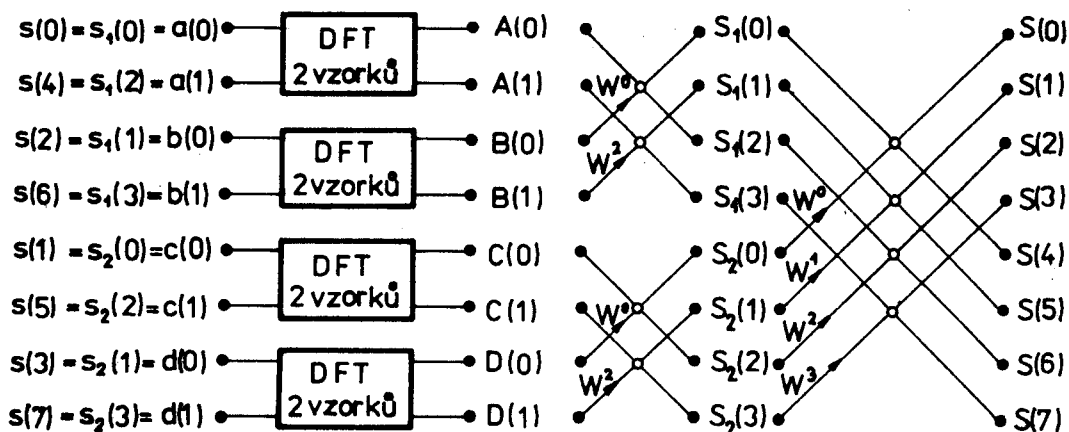
$$S_1(n) = \left\{ \begin{array}{ll} A(n) + W_N^{2n} B(n), & 0 \leq n \leq N/4 - 1 \\ A(n - \frac{N}{4}) - W_N^{2n - N/2} B(n - \frac{N}{4}), & N/4 \leq n \leq N/2 - 1 \end{array} \right\} \quad (4.59)$$



$$a \xrightarrow{W^k} a W^k$$

Obr. 4.9

Doplníme-li graf podle obr. 4.9 grafem popisujícím (4.59), dostaneme obr. 4.10. Je zřejmé, že vždy bereme dva čtvrté vzorky, provedeme jejich DFT a násobením a sečítáním podle (4.59) a (4.58), resp. podle grafu 4.10 získáme výsledek.



Obr. 4.10

Uvedeným způsobem lze pokračovat, až máme vzorky ve skupinách po dvou, tj. $f(0)$ a $f(1)$. Jejich DFT je podle (4.49)

$$\{F(n)\}_{n=0}^1 = \left\{ \sum_{k=0}^1 f(k) W_2^{nk} \right\}_{n=0}^1$$

tj.

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f(1) W_2^0 \\ F(1) &= f(0) + f(1) W_2^1 \end{aligned}$$

Protože $W_2^0 = W_N^0 = 1$

$$\text{a dále } W_2^1 = e^{-j(2\pi/2) \cdot 1} = e^{-j\pi} = e^{-j(2\pi/N) \cdot (N/2)} = W_N^{N/2} = -1$$

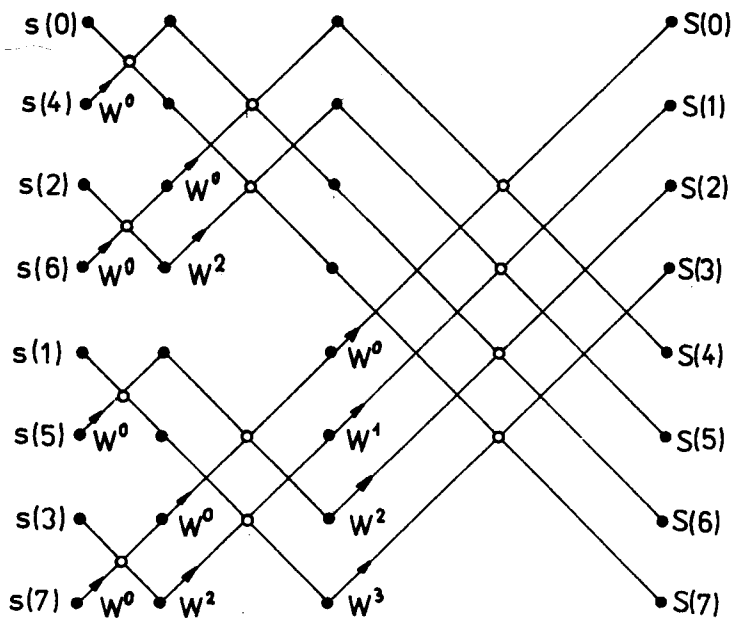
můžeme psát pro DFT dvou vzorků

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= f(0) + f(1) W_N^0 \\ F(1) &= f(0) + f(1) W_N^{N/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

nebo

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= f(0) + f(1) \\ F(1) &= f(0) - f(1) \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

a pro výpočet DFT dvou vzorků není třeba násobení. V případě DFT 8 vzorků je algoritmus znázorněn grafem na obr. 4.11.



Obr. 4.11

Graf na obr. 4.11 ilustruje podstatné snížení počtu prováděných operací. V každé etapě, tj. při zmenšení počtu dat určených pro DFT na polovinu, je třeba provést $N/2$ komplexních násobení tzv. fázovými koeficienty W . Protože etapa je $\log_2 N$, měl by celkový počet komplexních násobení být $(N/2) \log_2 N$. Ve skutečnosti je počet násobení ještě menší, protože některá jsou triviální - např. $W_N^0, W_N^{N/2}$ atd. a vedou pouze na součet nebo rozdíl. Např. při FFT osmi vzorků by bylo podle obr. 4.11 zapotřebí $4 \log_2 8 = 12$ součinů, ve skutečnosti jsou zapotřebí jen 2 netriviální součiny (W_8^1 a W_8^3).

Uvedený postup se nazývá redukce v čase, protože v každé etapě se vstupní posloupnost (časová) rozdělí na dvě posloupnosti kratší - tedy posloupnost se v každé etapě redukuje. V anglické literatuře se označuje jako DIT algoritmus (decimation in time).

Redukce v čase má za následek, že se vždy nejprve provádí DFT na dvojicích vzorků, které jsou od sebe vzdáleny $N/2$ - viz obr. 4.11. Tzn., že vstupní posloupnost nemá zachováno přirozené pořadí vzorků, ale má tzv. dvojkově - inverzní uspořádání. To získáme následujícím způsobem. Zapišeme pořadová čísla prvků vstupní posloupnosti (v přirozeném pořadí) ve dvojkovém tvaru s L dvojkovými řády ($N = 2^L$). Potom obrátíme pořadí dvojkových cifer a získáme posloupnost čísel. Tato posloupnost určuje jak budou v dvojkově inverzní posloupnosti následovat vzorky posloupnosti původní. V tab. 4.1 je popsána operace provedena pro $N = 8$ a její použití je patrné v grafu obr. 4.11.

Na obr. 4.12 je podprogram pro výpočet FFT zapsaný v programovacím jazyku FORTRAN [18]. Parametry podprogramu jsou: pole A vzorků, mocnina M dvou určující počet vzorků $N = 2^M$. V cyklu začínajícím příkazem `DO 7 I = 1, N/2` a končícím příkazem s návěštím 7 se provádí dvojkově inverzní uspořádání prvků pole A . Cyklus začínající příkazem `DO 20 L=1, M` zajišťuje počítání jednotlivých etap FFT pro

Číslo	Dvojkové vyjádření	Dvojková inverse	Dvojkové inverzní číslo
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Tab.4.1

```

SUBROUTINE FFT (A,M,N)
COMPLEX A(N),U,W,T
N = 2**M
NV2 = N/2
NM1 = N-1
J = 1
DO 7 I = 1,NM1
IF (I.GE.J) GO TO 5
T = A(J)
A(J) = A(I)
A(I) = T
5 K = NV2
6 IF (K.GE.J) GO TO 7
J = J - K
K = K/2
GO TO 6
7 J = J + K
PI = 3.141592653589793
DO 20 L = 1,M
LE = 2**L
LE1 = LE/2
U = (1.0,0.)
W = CMPLX(COS(PI/LE1),SIN(PI/LE1))
DO 20 J = 1,LE1
DO 10 I = J,N,LE
IP = I + LE1
T = A(IP)*U
A(IP) = A(I) - T
10 A(I) = A(I) + T
20 U = U*W
RETURN
END

```

Obr.4.12

každou etapu přírůstek pro výpočet W . Příkaz $DO\ 10\ I=J,N,LE$ zajišťuje provedení operací podle vztahu (4.61). Příkazy odpovídající (4.61) jsou na řádce s návěštím 10 a na dvou řádkách předcházejících. Příkaz $DO\ 20\ J = 1, LE1$ zajišťuje postupné provádění dílčích DFT v každé etapě a výpočet příslušných hodnot W .

Jak jsme již uvedli výše, dosahuje se při použití FFT značných úspor strojového času. Počet součtů a násobení je u DFT přibližně roven N^2 , u FFT přibližně $N \log_2 N$. Počty součtů a násobení pro obě metody jsou zřejmé z tab. 4.2 (viz [18]).

Popsaný algoritmus lze modifikovat několika způsoby, např. tak, že vstupní i výstupní posloupnost jsou v přirozeném pořadí. Podrobnosti nalezne čtenář např. v [11].

N	N^2	$N \log_2 N$	$N^2 / (N \log_2 N)$
2	4	2	2,0
4	16	8	2,0
8	64	24	2,7
16	256	64	4,0
32	1 024	160	6,4
64	4 096	384	10,7
128	16 384	896	18,3
256	65 536	1 024	32,0
512	262 144	4 608	56,9
1 024	1 048 576	10 240	102,4
2 048	4 194 304	22 528	186,2

Tab.4.2

4.5.2 Rychlá Fourierova transformace s redukcí v kmitočtu

Rychlá Fourierova transformace s redukcí v kmitočtu spočívá v tom, že se posloupnost vzorků signálu $\{s(k)\}$ rozdělí na posloupnosti $\{s_1(k)\}$ a $\{s_2(k)\}$, z nichž prvá je tvořena prvými $N/2$ členy $\{s(k)\}$, druhá členy zbývajících:

$$\left. \begin{aligned} s_1(k) &= s(k) \\ s_2(k) &= s(k + N/2) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

Potom je DFT $[\{s(k)\}]$

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} s(k) W_N^{nk} + \sum_{k=N/2}^{N-1} s(k) W_N^{nk} = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} s_1(k) W_N^{nk} + \sum_{k=0}^{N/2-1} s_2(k) W_N^{(k+N/2)n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} [s_1(k) + e^{-j\pi n} s_2(k)] W_N^{kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

(4.62)

Vzorky spektra podle (4.62) můžeme rozložit na sudé a liché, respektujeme-li, že

$$e^{-j2\pi n} = 1 \quad \text{a} \quad e^{-j(2n+1)\pi} = -1.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} S(2n) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} [s_1(k) + s_2(k)] (W_N^2)^{kn} = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} \underbrace{[s_1(k) + s_2(k)]}_{f(k)} W_{N/2}^{kn} \end{aligned}$$

(4.63)

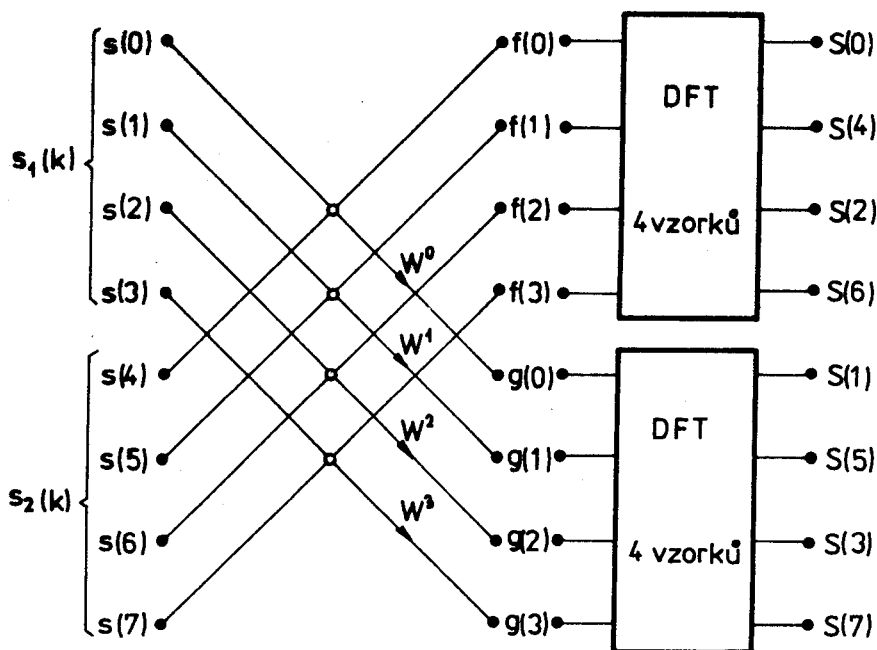
$$\begin{aligned}
 S(2n+1) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} [s_1(k) - s_2(k)] W_N^{k(2n+1)} = \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} \underbrace{\{ [s_1(k) - s_2(k)] W_N^k \}}_{g(k)} W_N^{kn} = \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

Z uvedeného je patrné, že sudé a liché vzorky spektra získáme DFT posloupností $\{f(k)\}$ a $\{g(k)\}$

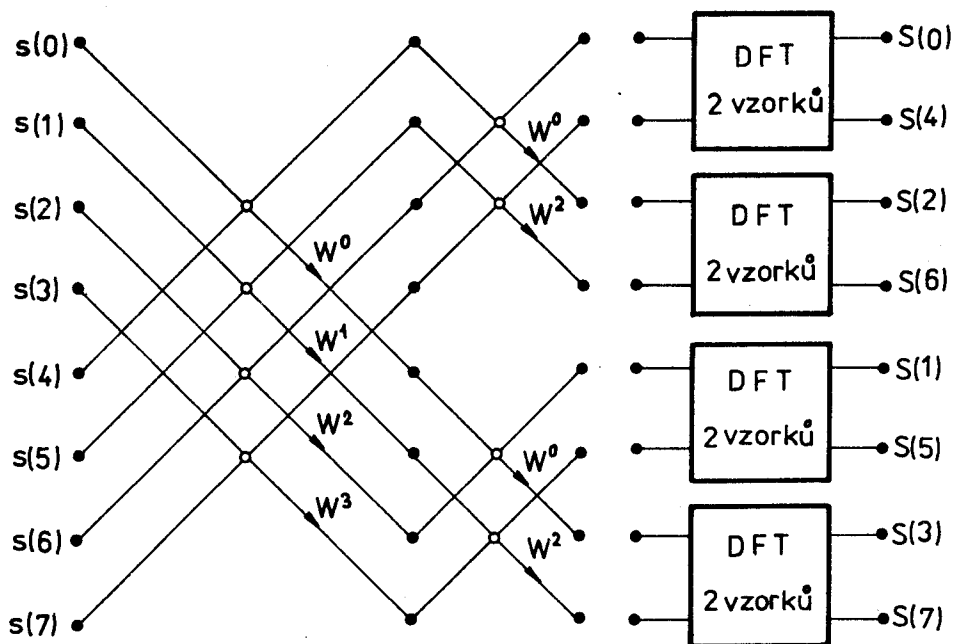
$$\left. \begin{aligned} f(k) &= s_1(k) + s_2(k) , \\ g(k) &= [s_1(k) - s_2(k)] W_N^k \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1. \quad (4.65)$$

Problém DFT posloupností N vzorků byl převeden na dvě DFT $N/2$ vzorků; viz obr. 4.13, kde je situace pro $N = 8$. Postup lze použít opakovaně - viz obr. 4.14 a 4.15; na obr. 4.15 je graf výsledného algoritmu.

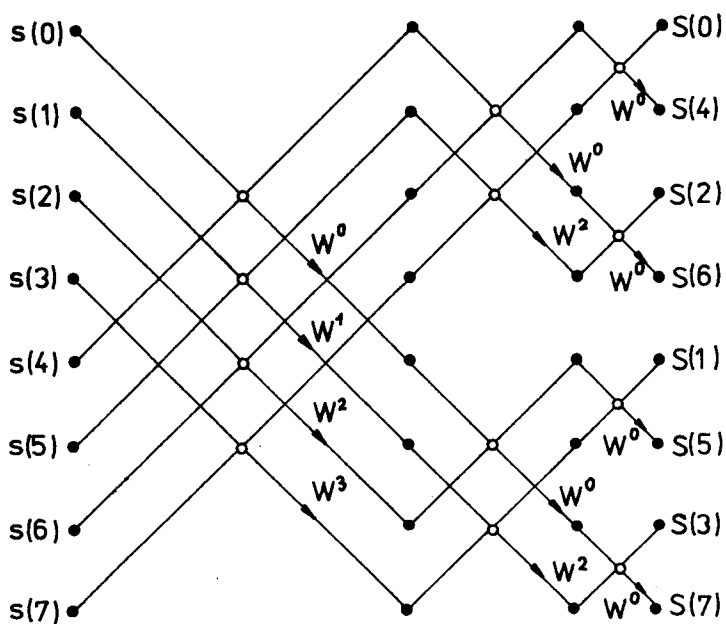
Uvedený postup je v anglické literatuře označován jako DIF (decimation in frequency).



Obr. 4.13



Obr. 4.14



Obr. 4.15

4.5.3 Použití algoritmu FFT pro výpočet inverzní DFT

Inverzní DFT jsme definovali vztahem (4.6)

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{jn(2\pi/N)k} ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Pravou stranu výrazu můžeme také vyjádřit pomocí komplexně sdružené hodnoty

$$s(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} S^*(n) e^{-jn(2\pi/N)k} \right)^* . \quad (4.66)$$

Výraz v závorce (4.66) představuje přímou DFT posloupnosti $\left\{ \frac{1}{N} S^*(n) \right\}_{n=0}^{N-1}$ a tudíž můžeme pro inverzní DFT také psát

$$\left\{ s(k) \right\}_{k=0}^{N-1} = \text{DFT}^{-1} \left[\left\{ S(n) \right\}_{n=0}^{N-1} \right] = \frac{1}{N} \left(\text{DFT} \left[\left\{ S^*(n) \right\}_{n=0}^{N-1} \right] \right)^* , \quad (4.67)$$

tj. inverzní DFT můžeme vyjádřit jako $1/N$ -násobek komplexně sdružených hodnot přímé DFT provedené na komplexně sdružených obrazech.

Z uvedeného vyplývá postup inverzní FFT. K převáděným hodnotám nalezneme hodnoty komplexně sdružené, na které uplatníme FFT. Získanou posloupnost dělíme člen po členu N , přičemž vytváříme komplexně sdružené hodnoty - ty představují prvky posloupnosti, která je inverzní DFT.

5. ZOBECNĚLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Při vyjádření signálů pomocí Fourierovy řady nebo Fourierovy transformace jsme signály rozkládali do složek představovaných sinovými, kosinovými a exponenciálními funkcemi. Tyto funkce tvoří ortogonální systémy. Kromě uvedených funkcí známe ještě řadu dalších, které tvoří ortogonální systémy a které nacházejí v poslední době uplatnění při zpracování signálů. Zabývejme se proto dále obecným přístupem k rozkladu signálu na ortogonální složky [3], [7].

5.1 ANALOGIE MEZI VEKTORY A SIGNÁLY

5.1.1 Vektory

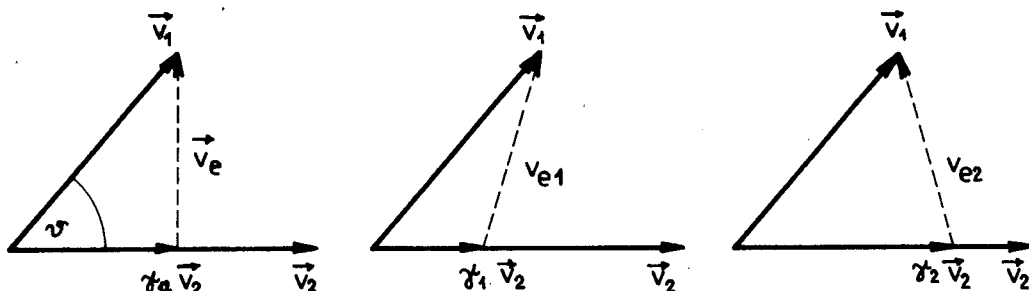
Mějme dva vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Složku vektoru $\vec{v}_1$ ve směru vektoru $\vec{v}_2$ nalezneme jako kolmý průmět na $\vec{v}_2$ (obr. 5.1). Označíme ji $\gamma_{12} \vec{v}_2$.

Složku vektoru $\vec{v}_1$ ve směru vektoru $\vec{v}_2$ můžeme určit také jiným než kolmým promítáním. Na obr. 5.1 jsou uvedeny další dva případy. Pro každý případ můžeme psát

$$\vec{v}_1 = \gamma_{12} \vec{v}_2 + \vec{v}_e , \quad (5.1a)$$

$$\vec{v}_1 = \gamma_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_{e1}, \quad (5.1b)$$

$$\vec{v}_1 = \gamma_2 \vec{v}_2 + \vec{v}_{e2}. \quad (5.1c)$$



Obr. 5.1

V každém případě vyjadřujeme $\vec{v}_1$ pomocí $\vec{v}_2$ a vektoru, který můžeme nazvat chybovým vektorem ($\vec{v}_e, \vec{v}_{e1}, \vec{v}_{e2}$). V případě kolmého promítání je chybový vektor nejmenší.

Nyní můžeme říci, že složkou vektoru $\vec{v}_1$ ve směru vektoru $\vec{v}_2$ je veličina $\gamma_{12} \vec{v}_2$, kde γ_{12} se volí tak, aby chybový vektor byl minimální (v našem případě ji určíme kolmým promítáním).

Zabývejme se nyní fyzikálním smyslem vyjádření vektoru $\vec{v}_1$ vektorem $\vec{v}_2$. Čím je složka jednoho vektoru ve směru druhého vektoru větší, tím je rozdíl ve směrech vektorů menší a tím menší je chybový vektor. Ve výše uvedeném případě tedy γ_{12} udává, do jaké míry jsou vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ podobné. Jestliže je $\gamma_{12} = 0$, nemá $\vec{v}_1$ složku ve směru $\vec{v}_2$, vektory jsou ortogonální (kolmé) a ve smyslu uvedeného výkladu je považujeme za nezávislé.

Pro určení velikosti složky jednoho vektoru ve směru druhého vektoru můžeme použít skalární součin vektorů

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \varphi,$$

kde φ je úhel, který vektory svírají. Potom velikost složky $\vec{v}_1$ ve směru $\vec{v}_2$ je

$$|\vec{v}_1| \cdot \cos \varphi = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}$$

a protože jsme ji označili jako $\gamma_{12} \vec{v}_2$, je její velikost

$$\gamma_{12} |\vec{v}_2| = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}$$

a tedy

$$\gamma_{12} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}. \quad (5.2)$$

Jsou-li vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ ortogonální, pak

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$\gamma_{12} = 0.$$

5.1.2 Signály

Způsob vyjádření jednoho vektoru druhým můžeme použít i pro signály. Předpokládejme, že máme dva signály $S_1(t)$ a $S_2(t)$ a že budeme signál $S_1(t)$ aproximovat signálem $S_2(t)$ na intervalu (t_a, t_b) , tj.

$$S_1(t) \approx \gamma_{12} S_2(t) \quad ; \quad t_a < t < t_b. \quad (5.3)$$

Vzniká otázka volby γ_{12} tak, aby aproximace byla na intervalu (t_a, t_b) co nejllepší. Jsou různá kritéria "blízkosti" aproximovaného a aproximujícího signálu. Vezmés se v nich uplatňuje chybový signál

$$S_e(t) = S_1(t) - \gamma_{12} S_2(t). \quad (5.4)$$

Kriterium totožnosti signálů (konvergence ve všech bodech)

$$S_e(t) = 0 \quad ; \quad t \in (t_a, t_b)$$

se obtížně splňuje. Častěji se používá minimalizace střední chyby (konvergence podle středu), kdy se hledá γ_{12} tak, aby byl minimální výraz

$$\frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} |S_1(t) - \gamma_{12} S_2(t)| dt,$$

tj. aby byla minimální střední hodnota chybového signálu.

Nejčastěji užívaným kriteriem je minimalizace střední kvadratické chyby, tj. taková volba γ_{12} , aby byl minimální střední výkon chybového signálu (viz (1.21)), tj.

$$P_E = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} S_e^2(t) dt = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} [S_1(t) - \gamma_{12} S_2(t)]^2 dt. \quad (5.5)$$

Hledejme nyní, pro jaké γ_{12} bude P_E minimální, tj. hledejme, kdy

$$\frac{dP_E}{d\gamma_{12}} = 0,$$

tj.

$$\frac{d}{d\gamma_{12}} \left\{ \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} [S_1(t) - \gamma_{12} S_2(t)]^2 dt \right\} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{d}{d\gamma_{12}} s_1^2(t) - 2 \frac{d}{d\gamma_{12}} [s_1(t) \gamma_{12} s_2(t)] + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\gamma_{12}} [\gamma_{12}^2 s_2^2(t)] \right\} dt = 0, \\ -2 \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} s_1(t) s_2(t) dt + 2 \frac{1}{t_b - t_a} \gamma_{12} \int_{t_a}^{t_b} s_2^2(t) dt = 0 \end{aligned}$$

a tedy γ_{12} , které minimalizuje střední výkon chybového signálu je

$$\gamma_{12} = \frac{\int_{t_a}^{t_b} s_1(t) s_2(t) dt}{\int_{t_a}^{t_b} s_2^2(t) dt}. \quad (5.6)$$

Připomeňme nyní, že jsme vyjadřovali vektor $\vec{V}_1$ pomocí vektoru $\vec{V}_2$ a našli jsme γ_{12} podle (5.2) tak, aby chyba byla co nejmenší. Podobně jsme pro signály našli výraz (5.6), který umožňuje vyjádřit signál $S_1(t)$ pomocí signálu $S_2(t)$ tak, aby střední výkon chyby byl co nejmenší. Na základě analogie mezi (5.2) a (5.6) definujeme integrály v (5.6) jako skalární součin signálů $S_1(t)$ a $S_2(t)$. O signálech $S_1(t)$ a $S_2(t)$, pro které

$$\int_{t_a}^{t_b} S_1(t) S_2(t) dt = 0 \quad (5.7)$$

mluvíme jako o signálech ortogonálních.

Analogicky s vektory neobsahuje jeden ze dvou ortogonálních signálů složky druhého. V případě, že bychom aproximovali signál signálem k němu ortogonálním, bude chyba aproximace větší než je aproximovaný signál. Proto je pak lepší aproximovat neortogonálním nulovým signálem $\gamma_{12} S_2(t) = 0$. V tomto případě je tedy optimální volit $\gamma_{12} = 0$.

5.1.3 Soustava ortogonálních vektorů

Předpokládejme, že máme n-rozměrný prostor. Jednotkové vektory ve směru jeho souřadnic jsou $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$. Složky vektoru $\vec{V}$ ve směrech souřadnic nalezneme

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \vec{V} \cdot \vec{w}_1 \\ v_2 &= \vec{V} \cdot \vec{w}_2 \\ &\vdots \\ v_n &= \vec{V} \cdot \vec{w}_n \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Vzhledem ke kolmosti jednotkových vektorů platí

$$\vec{w}_m \cdot \vec{w}_n = \begin{cases} 0 & \text{když } m \neq n \\ 1 & \text{když } m = n \end{cases} \quad (5.9)$$

Jestliže v souřadném systému chybí některá z os, nemůžeme vyjádřit všechny složky vektoru. Abychom mohli vyjádřit libovolný vektor, musíme mít úplný systém jednotkových vektorů.

Systém vektorů $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ budeme nazývat ortogonálním systémem vektorů, jestliže platí

$$\vec{w}_m \cdot \vec{w}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ P_m & m = n \end{cases} \quad (5.10)$$

Jestliže $P_m = 1$, mluvíme o normovaném nebo ortonormálním systému vektorů.

Máme-li ortogonální systém vektorů $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots\}$, který je úplný, můžeme libovolný vektor $\vec{V}$ vyjádřit

$$\vec{V} = v_1 \vec{w}_1 + v_2 \vec{w}_2 + \dots + v_k \vec{w}_k + \dots \quad (5.11)$$

Abychom získali složku v_k , musíme (5.11) skalárně násobit $\vec{w}_k$.

$$\vec{V} \cdot \vec{w}_k = v_1 \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_k + v_2 \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_k + \dots + v_k \vec{w}_k \cdot \vec{w}_k + \dots$$

což vzhledem k ortogonalitě (5.10) dá

$$\vec{V} \cdot \vec{w}_k = v_k \cdot P_k$$

a žádaná složka v_k je

$$v_k = \frac{\vec{V} \cdot \vec{w}_k}{P_k} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{w}_k}{\vec{w}_k \cdot \vec{w}_k} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Výraz (5.12) je obdobou výrazu (5.2).

5.1.4 Soustava ortogonálních signálů

V předcházejícím odstavci jsme ukázali, že libovolný vektor můžeme vyjádřit pomocí jeho vzájemně kolmých složek, jestliže tyto složky tvoří úplný (ortogonální) systém. Na základě analogií popsaných v odstavcích 5.1.1 a 5.1.2 můžeme očekávat, že i libovolný signál můžeme vyjádřit jako součet vzájemně ortogonálních signálů, jestliže tvoří úplný systém.

Předpokládejme, že máme soustavu k funkcí $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_k(t)$, které jsou vzájemně ortogonální na intervalu (t_a, t_b) , tj. podle odst. 5.1.2

$$\int_{t_a}^{t_b} \gamma_i(t) \gamma_j(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E_j & i = j \end{cases} \quad (5.13)$$

V soulase s odstavci 5.1.2 a 5.1.3 budeme aproximovat signál $s(t)$ na intervalu (t_a, t_b) lineární kombinací těchto funkcí

$$s(t) \approx \sum_{n=1}^k \gamma_n \chi_n(t). \quad (5.14)$$

Koeficienty γ_n budeme hledat tak, aby střední výkon chybového signálu

$$s_e(t) = s(t) - \sum_{n=1}^k \gamma_n \chi_n(t) \quad (5.15)$$

tj.

$$P_E = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} \left[s(t) - \sum_{n=1}^k \gamma_n \chi_n(t) \right]^2 dt \quad (5.16)$$

byl minimální. Vzhledem k ortogonalitě (5.13) můžeme (5.16) přepsat

$$P_E = \frac{1}{t_b - t_a} \left[\int_{t_a}^{t_b} s^2(t) dt - 2 \sum_{n=1}^k \gamma_n \int_{t_a}^{t_b} s(t) \chi_n(t) dt + \sum_{n=1}^k \gamma_n^2 E_n \right]$$

Dále hledáme, pro jakou hodnotu γ_n , $n = 1, 2, \dots, k$ má P_E minimum, tj. hledáme γ_n tak, aby

$$\frac{\partial P_E}{\partial \gamma_n} = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, k$$

Derivaci

$$\frac{\partial P_E}{\partial \gamma_n} = \frac{1}{t_b - t_a} \left[-2 \int_{t_a}^{t_b} s(t) \chi_n(t) dt + 2 \gamma_n E_n \right]$$

← pro P_E

položíme rovnou nule a dostaneme

$$\gamma_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_a}^{t_b} s(t) \chi_n(t) dt \quad (5.17)$$

kde podle (5.13)

$$E_n = \int_{t_a}^{t_b} \chi_n^2(t) dt \quad (5.18)$$

(Ponecháme na čtenáři, aby si sám ověřil, že jde skutečně o minimum.)

Můžeme tedy signál $s(t)$ aproximovat na intervalu (t_a, t_b) řadou (5.14) vzájemně ortogonálních funkcí. Aby aproximace byla nejlepší ve smyslu minimální středně

kvadratické odchylky, volíme koeficienty γ_n podle vztahu (5.17).

Hledejme nyní velikost střední kvadratické odchylky (5.16), jestliže koeficienty γ_n odpovídají optimální hodnotě podle (5.17). Do výrazu pro P_E

$$P_E = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} \left[s(t) - \sum_{n=1}^k \gamma_n \varphi_n(t) \right]^2 dt = \frac{1}{t_b - t_a} \left[\int_{t_a}^{t_b} s^2(t) dt - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^k \gamma_n \int_{t_a}^{t_b} s(t) \varphi_n(t) dt + \sum_{n=1}^k \gamma_n^2 E_n \right]$$

dosadíme integrál z (5.17) a dostaneme

$$P_E = \frac{1}{t_b - t_a} \left[\int_{t_a}^{t_b} s^2(t) dt - 2 \sum_{n=1}^k \gamma_n^2 E_n + \sum_{n=1}^k \gamma_n^2 E_n \right],$$

tj:

$$P_E = \frac{1}{t_b - t_a} \left[\int_{t_a}^{t_b} s^2(t) dt - \sum_{n=1}^k \gamma_n^2 E_n \right]. \quad (5.19)$$

Podle definice je střední kvadratická chyba P_E nezáporná a tedy podle (5.19) je výkon P signálu $s(t)$ větší než součet výkonů aproximujících signálů (tzv. Besselova nerovnost), tj.

$$P \geq \sum_{n=1}^k \gamma_n^2 P_n \quad (5.20)$$

kde

$$P_n = \frac{1}{t_b - t_a} E_n.$$

Hodnoty γ_n nezáleží na řádu k mnohočlenu. Přidáme-li k aproximujícímu mnohočle-
nu další složky, nemění se hodnoty složek dříve vypočtených. Při zvýšení počtu
složek se P_E zmenší, aproximace se zpřesňuje. Pro $k \rightarrow +\infty$, $P_E \rightarrow 0$ a

$$\int_{t_a}^{t_b} s^2(t) dt \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 E_n. \quad (5.21)$$

Potom nekonečná řada

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(t) \quad (5.22)$$

konverguje k $S(t)$ tak, že střední kvadratická odchylka je rovna nule.

Soustavu ortogonálních funkcí $\{\varphi_n(t)\}_n$ budeme nazývat úplnou, jestliže neexistuje taková funkce $x(t)$, pro kterou by platilo

$$\int_{t_a}^{t_b} x(t) \varphi_n(t) dt = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

Úplná soustava ortogonálních funkcí se někdy nazývá báze.

Porovnáme-li soustavu ortogonálních vektorů a soustavu ortogonálních signálů, je zřejmé, že si odpovídají výrazy (5.10), (5.13) a (5.12), (5.17), (5.18). Tak, jako lze libovolný vektor vyjádřit součtem vzájemně ortogonálních vektorů, tvoří-li úplnou soustavu, lze i libovolný signál vyjádřit součtem ortogonálních signálů, které tvoří úplnou soustavu.

Vyjádření signálu řadou (5.22) s koeficienty (5.17) nazýváme zobecnělou Fourierovou řadou.

5.1.5 Komplexní ortogonální funkce

Dosud jsme předpokládali, že funkce $\{\varphi_n(t)\}$ jsou reálné. Jestliže jsou komplexní, jsou ortogonální na intervalu (t_a, t_b) , když

$$\int_{t_a}^{t_b} \varphi_i^*(t) \varphi_k(t) dt = \int_{t_a}^{t_b} \varphi_i(t) \varphi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & ; i \neq k \\ E_k & ; i = k \end{cases} \quad (5.23)$$

Je-li systém úplný, lze signál $S(t)$ rozložit na (t_a, t_b) do řady

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(t) \quad , \quad (5.24)$$

kde

$$\gamma_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_a}^{t_b} S(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (5.25)$$

5.1.6 Vyjádření libovolného signálu zobecnělou Fourierovou řadou na nekonečném intervalu času

Až dosud jsme předpokládali, že signál $S(t)$ aproximujeme zobecnělou Fourierovou řadou na intervalu (t_a, t_b) . Vně tohoto intervalu nemusí Fourierova řada $f(t)$ konvergovat k signálu $S(t)$.

Bude-li signál $S(t)$ periodický s periodou T_0 , můžeme provést jeho rozklad na intervalu $(t_a, t_a + T_0)$ pomocí báze ortogonální na tomto intervalu. Jsou-li signály báze $\{\varphi_n\}$ periodické s periodou T_0/n , $n = 1, 2, \dots$, je zřejmé, že jsme periodický signál nahradili Fourierovou řadou nejen na intervalu $(t_a, t_a + T_0)$, ale na celé časové ose $t \in (-\infty, +\infty)$.

Případ přechodu na transformaci neperiodického signálu jsme uvedli v kapitole 3.1.

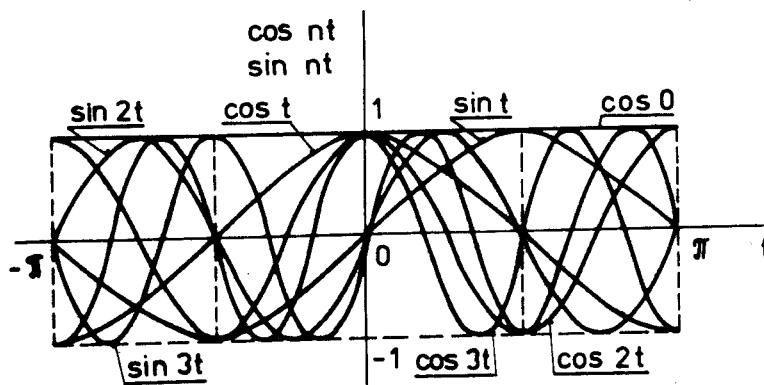
5.2 SYSTÉMY ORTOGONÁLNÍCH FUNKCÍ POUŽÍVANÉ PRO ROZKLAD SIGNÁLŮ

5.2.1 Systém funkcí $\{\cos nt, \sin nt\}$

Systém funkcí

$$\{\cos nt, \sin nt\}_{n=0}^{\infty} = \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$$

Je systém ortogonální na intervalu $\langle -\pi, +\pi \rangle$ (viz vztahy (2.17)). Je úplný a periodický. Nahradíme-li t součinem $\omega_0 t = (2\pi/T_0) \cdot t$, dostaneme systém ortogonální na intervalu $\langle -T_0/2, T_0/2 \rangle$ (obr. 5.2).



Obr. 5.2

Pro $n = 0$ dostaneme z (5.18)

$$E_0 = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} dt = T_0$$

a z (5.17)

$$\gamma_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) dt. \quad (5.26)$$

Energie kosinových složek báze je

$$c_{E_n} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \cos^2 n \omega_0 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} dt = \frac{T_0}{2}$$

a tudíž

$$c\gamma_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \cos n\omega_0 t \, dt. \quad (5.27)$$

Pro sinové složky je energie

$$sE_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sin^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T_0}{2}$$

a koeficienty

$$s\gamma_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \sin n\omega_0 t \, dt. \quad (5.28)$$

Porovnáme-li vztahy (5.26) - (5.28) s (2.19a) - (2.19c) je zřejmé, že zobecněná Fourierova řada přechází v řadu trigonometrickou, kde

$$\frac{a_0}{2} = \gamma_0 \quad ; \quad a_n = c\gamma_n \quad ; \quad b_n = s\gamma_n.$$

5.2.2 Systém funkcí $\{e^{jnt}\}$

Systém funkcí

$$\left\{ e^{jnt} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

je systém ortogonální na intervalu $(-\pi, +\pi)$, neboť podle (5.23)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (e^{jit}) \cdot (e^{jkt})^* dt = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(i-k)t} dt = I.$$

Pro $i = k$ je $I = 2\pi$ Pro $i \neq k$ je

$$I = \frac{1}{j(i-k)} \left[e^{j(i-k)\pi} - e^{-j(i-k)\pi} \right] = 0.$$

Potom

$$E_n = 2\pi$$

a koeficienty γ_n podle (5.25)

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s(t) \bar{e}^{jnt} dt.$$

Nahradíme-li t novou proměnnou $\omega_0 t$, dostaneme

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} \frac{2\pi}{T_0} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

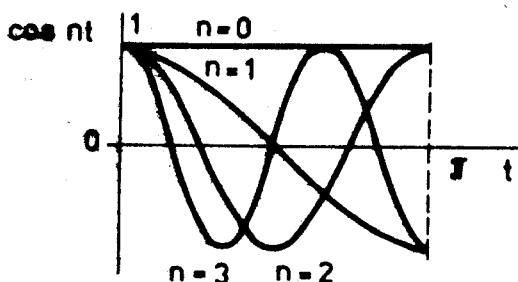
a zobecněná Fourierova řada přejde v komplexní Fourierovu řadu podle (2.26)

• $\gamma_n = c_n$.

Systém $\{e^{jnt}\}$ je úplný a periodický.

5.2.3 Systém funkcí $\{\cos nt\}$

Systém $\{\cos nt\}$ je ortogonální úplný systém na intervalu $< 0, \pi \rangle$ -



Obr. 5.3

viz obr. 5.3. Necháme čtenáři na ověření, že systém není ortogonální k systému $\{\sin nx\}$. Není rovněž systémem periodickým. Použije se buď k rozvoji neperiodické funkce tak, že se provede její sudé prodloužení, nebo se použije k rozvoji sudé periodické funkce. Mluvíme pak o kosinové Fourierově řadě. Často nahradíme t za $\omega_0 t = \frac{2\pi}{T_0} t$ a získáme bázi na intervalu $< 0, T_0/2 \rangle$. Snadno se odvodí příslušné koeficienty

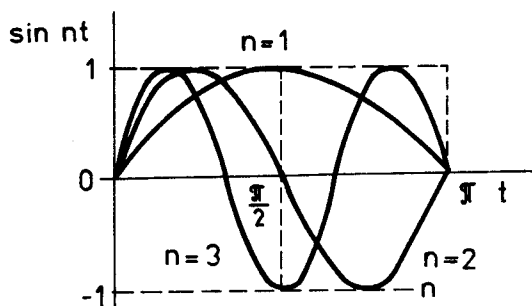
$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) dt, \\ \gamma_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cos n\omega_0 t dt,\end{aligned}$$

řady

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos n\omega_0 t.$$

5.2.4 Systém funkcí $\{\sin nt\}$

Systém $\{\sin nt\}$ je úplný ortogonální neperiodický systém na intervalu $< 0, \pi \rangle$ (viz obr. 5.4).



Obr. 5.4

Použije se k rozvoji neperiodického signálu tak, že se provede jeho liché prodloužení. Lze ho použít k rozvoji lichého periodického signálu. Mluvíme pak o sinové Fourierově řadě. Často transformujeme interval ortogonality na

$< 0, T_0/2 \rangle$ a pak nahradíme t za $\omega_0 t = (2\pi/T_0) t$.

Koeficienty řady

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin n \omega_0 t$$

jsou

$$\gamma_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} s(t) \sin n \omega_0 t \, dt$$

5.2.5 Systém obdélníkových vzájemně se nepřekrývajících impulsů

$$\left\{ \text{rect}\left(\frac{t - \tau(n - \frac{1}{2})}{\tau}\right) \right\}_{n=1}^N$$

Báze není úplná (obr. 5.5).

Pro N impulsů je

$$\tau = \frac{t_b - t_a}{N}.$$

Doplníme-li další funkci $\gamma_{N+1}(t)$, bude opět ortogonální.

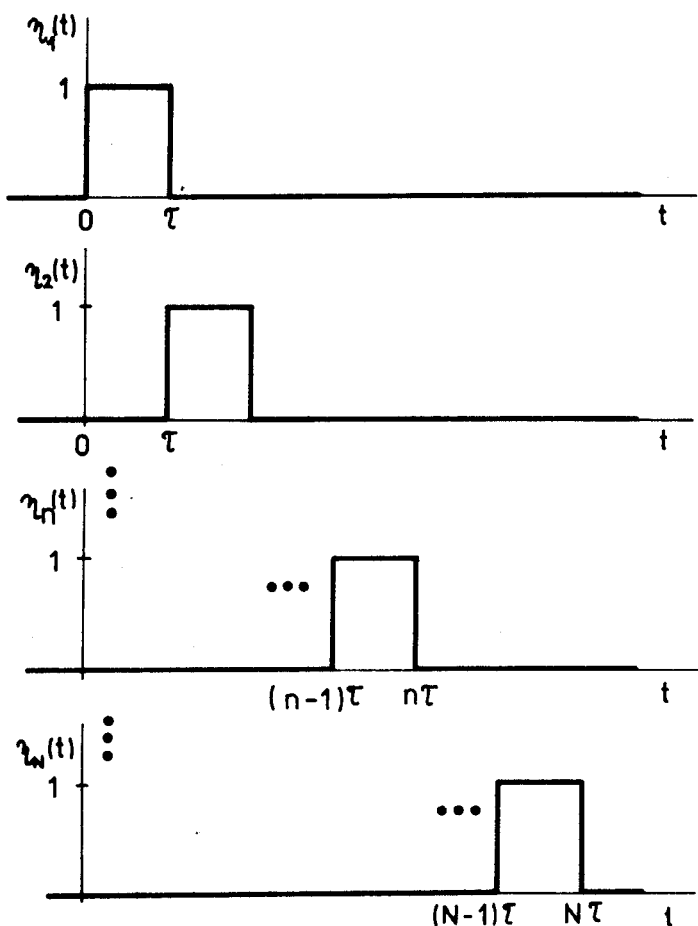
Protože

$$E_n = \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} dt = \tau,$$

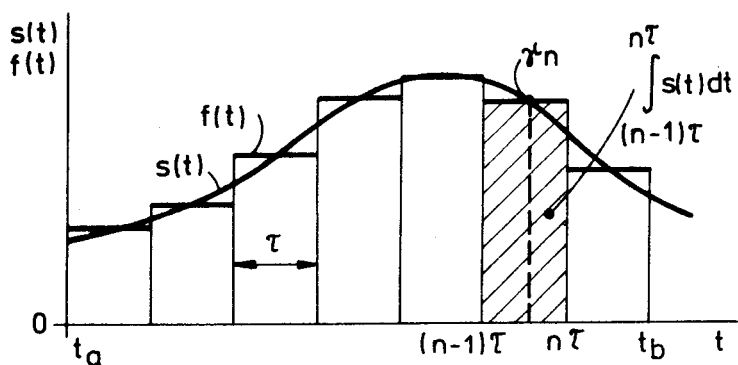
dostaneme

$$\gamma_n = \frac{1}{\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} s(t) \, dt,$$

tj. hodnoty koeficientů zobecněné Fourierovy řady jsou rovny střední hodnotě signálu v příslušném n -tém intervalu (obr. 5.6).



Obr. 5.5



Obr. 5.6

5.2.6 Systém funkcí $\{Sa(t-n\tau)\}_n$

V kapitole 2.3.8 jsme se zabývali tzv. vzorkovací funkcí

$$Sa(t) = \begin{cases} 1 & ; t = 0, \\ \frac{\sin t}{t} & ; t \neq 0. \end{cases}$$

Systém $\{Sa(t-n\pi)\}_n$ posunutých vzorkovacích funkcí má následující vlastnosti (obr. 5.7):

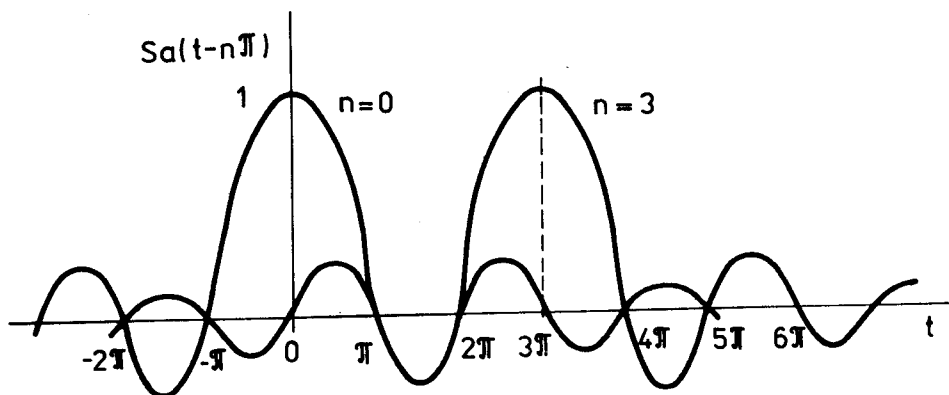
1) v bodech $t = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je

$$\gamma_n(n\pi) = Sa(0) = 1,$$

2) v bodech $t = k\pi$, $k \neq n$; k celé, je

$$\gamma_n(k\pi) = Sa((k-n)\pi) = 0,$$

3) systém je ortogonální.



Obr. 5.7

Všimněme si ortogonalitě systému. Systém je ortogonální na intervalu $(-\infty, +\infty)$, o čemž se můžeme přesvědčit:

a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n(t) \gamma_m(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} \cdot \frac{\sin(t-m\pi)}{t-m\pi} dt = \left| t-n\pi = x \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin[x-\pi(m-n)]}{x-\pi(m-n)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x-k\pi)}{x-k\pi} dx = I, \end{aligned}$$

$$\sin(x-k\pi) = \sin x \cos k\pi - \sin k\pi \cos x = (-1)^k \sin x,$$

$$I = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x(x-k\pi)} dx = \frac{(-1)^k}{k\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2 x}{x-k\pi} - \frac{\sin^2 x}{x} \right] dx =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2(x-k\pi)}{x-k\pi} - \frac{\sin^2 x}{x} \right] dx = 0$$

b)

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t-n\pi)}{(t-n\pi)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$$

Systém je ortogonální. Často však používáme vzorkovací funkce posunuté obecně o Δt . Takovýto systém má tvar

$$\left\{ \eta_n(t) \right\}_n = \left\{ \frac{\sin \pi F(t - n\Delta t)}{\pi F(t - n\Delta t)} \right\}_n, \quad (5.29)$$

kde $F = \frac{1}{\Delta t}$. U tohoto systému

$$E_n = \frac{1}{F} = \Delta t.$$

Koeficienty zobecněné Fourierovy řady

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \eta_n(t) \quad (5.30)$$

budou

$$\gamma_n = \frac{1}{E_n} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \eta_n(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \eta_n(t) dt.$$

Podle (3.22) pro ni dostaneme

$$\gamma_n = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) E_n^*(\omega) d\omega, \quad (5.31)$$

kde

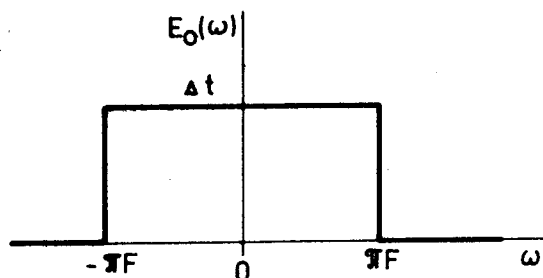
$$S(\omega) = F[s(t)],$$

$$E_n(\omega) = F[\eta_n(t)].$$

Podle obr. 3.7 zjistíme, že spektrum funkce $\eta_0(t) = \text{Sa}(\pi F t)$ je rovnoměrné v rozsahu kmitočtů $|\omega| < \pi F$, tj.

$$E_0(\omega) = \begin{cases} 0 & ; \quad |\omega| \geq \pi F, \\ \Delta t & ; \quad |\omega| < \pi F, \end{cases}$$

viz obr. (5.8).



Obr. 5.8

Ostatní funkce systému (5.29) se od $\eta_0(t)$ liší jen časovým posunem a tedy spektra se liší šinitелем $e^{-j(n\Delta t)\omega}$, tj.

$$E_n(\omega) = \begin{cases} 0 & ; \quad |\omega| \geq \pi F, \\ \Delta t e^{-j(n\Delta t)\omega} & ; \quad |\omega| < \pi F. \end{cases}$$

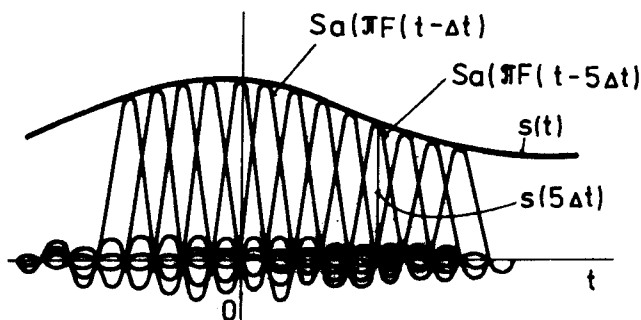
Potom (5.31) přejde na

$$\gamma_n = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi F}^{+\pi F} S(\omega) \Delta t e^{j(n\Delta t)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi F}^{+\pi F} S(\omega) e^{j(n\Delta t)\omega} d\omega. \quad (5.32)$$

Podle (5.32) je n -tý koeficient zobecněné Fourierovy řady pro $\gamma_n(t)$ báze (5.29) roven hodnotě signálu v okamžiku, kdy $\gamma_n(t)$ má maximum, tj.

$$\gamma_n = s(n\Delta t), \quad (5.33)$$

viz obr. 5.9. To znamená, že aproximujeme součtem signálů $\gamma_n(t)$ podle (5.29) tak, že každý signál $\gamma_n(t)$ je vážen velikostí vzorku signálu odebraného v čase $n\Delta t$.



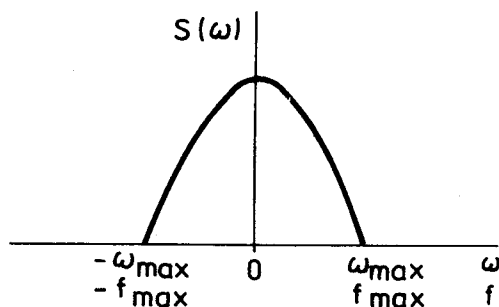
Obr. 5.9

musí být

$$\pi F > \omega_{\max}$$

tj.

$$F > 2 f_{\max}. \quad (5.34)$$



Obr. 5.10

Připomeneme, že F je kmitočet odbírání vzorků $F = 1/\Delta t$.

Získaný výsledek je předmětem vzorkovací věty Shannon - Kotělnikovovy:

Signál, jehož spektrum je soustředěno pouze v pásmu kmitočtů

$$< 0, f_{\max} \rangle \quad (\text{obr. 5.10}),$$

lze aproximovat řadou (5.30) funkcí (5.29). Koeficienty řady jsou vzorky signálu rovnoměrně odebírané s kmitočtem vzorkování,

který je větší než dvojnásobek maximálního kmitočtu obsaženého v signálu (viz (5.34)).

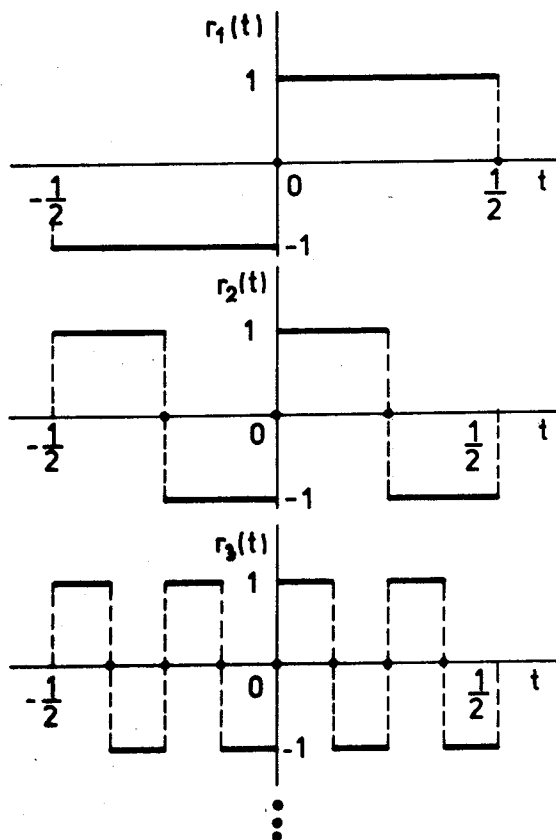
5.2.7 Systém Rademacherových funkcí

Rademacherovy funkce (obr. 5.11) se definují vztahem

$$r_n(t) = \text{sign} [\sin (2^n \pi t)] ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

(5.35)



Obr. 5.11

binární kombinace R_{n_2} . Ty udávají řady Rademacherových funkcí, jejichž součin dá Walshovu funkci řádu n . Např. $n = 6$ odpovídá $R_{n_2} = 101$, tj. použijeme Rademacherovu funkci $r_1(t)$ a $r_3(t)$. Průběh prvních osmi Walshových funkcí je na obr. 5.12.

Walshovy funkce mají tyto důležité vlastnosti:

- 1) Nabývají hodnot ± 1 . Pro libovolné n je $wal_n(t) = 1$.
- 2) Tvoří úplný ortonormální systém na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} wal_i(t) wal_j(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

(5.36)

Definiční obor se dělí na 2^n stejných podintervalů, v nichž funkce nabývají hodnot ± 1 .

Rademacherovy funkce jsou ortogonální. Jejich systém však není úplný - jsou liché.

Používají se ke generování Walshových funkcí, které uvedeme dále.

5.2.8 Walshovy funkce

Walshovy funkce tvoří úplný ortonormální systém

$\{wal_n(t)\}_n$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Existuje několik způsobů jejich vytváření. Zde popíšeme způsob využívající Rademacherových funkcí (tab. 5.1).

Funkce očíslováme celými čísly $0, 1, 2, \dots$. Postupným zdvojnásobováním počtu nul od nejnižšího řádu dostaneme

n	R_{n2}	$wal_n(t)$
0	0 0 0 0 0	$wal_0(t) = 1$
1	0 0 0 0 1	$wal_1(t) = r_1(t)$
2	0 0 0 1 1	$wal_2(t) = r_1(t) \cdot r_2(t)$
3	0 0 0 1 0	$wal_3(t) = r_2(t)$
4	0 0 1 1 0	$wal_4(t) = r_2(t) \cdot r_3(t)$
5	0 0 1 1 1	$wal_5(t) = r_1(t) \cdot r_2(t) \cdot r_3(t)$
6	0 0 1 0 1	$wal_6(t) = r_1(t) \cdot r_3(t)$
7	0 0 1 0 0	$wal_7(t) = r_3(t)$
8	0 1 1 0 0	$wal_8(t) = r_3(t) \cdot r_4(t)$
9	0 1 1 0 1	$wal_9(t) = r_1(t) \cdot r_3(t) \cdot r_4(t)$
10	0 1 1 1 1	$wal_{10}(t) = r_1(t) \cdot r_2(t) \cdot r_3(t) \cdot r_4(t)$
11	0 1 1 1 0	$wal_{11}(t) = r_2(t) \cdot r_3(t) \cdot r_4(t)$
12	0 1 0 1 0	$wal_{12}(t) = r_2(t) \cdot r_4(t)$
13	0 1 0 1 1	$wal_{13}(t) = r_1(t) \cdot r_2(t) \cdot r_4(t)$
14	0 1 0 0 1	$wal_{14}(t) = r_1(t) \cdot r_4(t)$
15	0 1 0 0 0	$wal_{15}(t) = r_4(t)$
16	1 1 0 0 0	$wal_{16}(t) = r_4(t) \cdot r_5(t)$
17	1 1 0 0 1	$wal_{17}(t) = r_1(t) \cdot r_4(t) \cdot r_5(t)$ atd.

Tab. 5.1

3) Systém je periodický s periodou 1.

4) Walshovy funkce $wal_n(t)$ s řádem $n = 2^k - 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ dělí pravidelně interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na 2^k dílů.

5) Systém Walshových funkcí je multiplikativní, tj. součin dvou Walshových funkcí je opět Walshova funkce. Platí

$$wal_i(t) \cdot wal_j(t) = wal_k(t), \quad (5.37)$$

kde

$$k = i \oplus j.$$

Operace $\oplus$ je součet binárních ekvivalentů indexů i a j modulo 2, tj.

$$k_{(2)} = i_{(2)} + j_{(2)} \pmod{2}. \quad (5.38)$$

Např.

$$i = 2, j = 6$$

$$i_{(2)} + j_{(2)} \pmod{2} = 10 + 110 \pmod{2} = 100 = k_{(2)}$$

$$k = 4$$

a tedy

$$\text{wal}_2(t) \cdot \text{wal}_6(t) = \text{wal}_4(t)$$

- 6) Vzhledem k ortonormalitě a multiplikativnosti je střední hodnota všech $\text{wal}_n(t)$, $n \neq 0$, nulová:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \text{wal}_k(t) dt &= \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \text{wal}_i(t) \text{wal}_j(t) dt = 0 \end{aligned}$$

$$k = i \oplus j$$

$$i \neq j.$$

Pro koeficienty rozvoje do zobecněné Fourierovy řady platí pro případ Walshových funkcí

$$\gamma_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} s(t) \text{wal}_n(t) dt.$$

(5.39)

Pokud budeme $s(t)$ aproximovat na intervalu

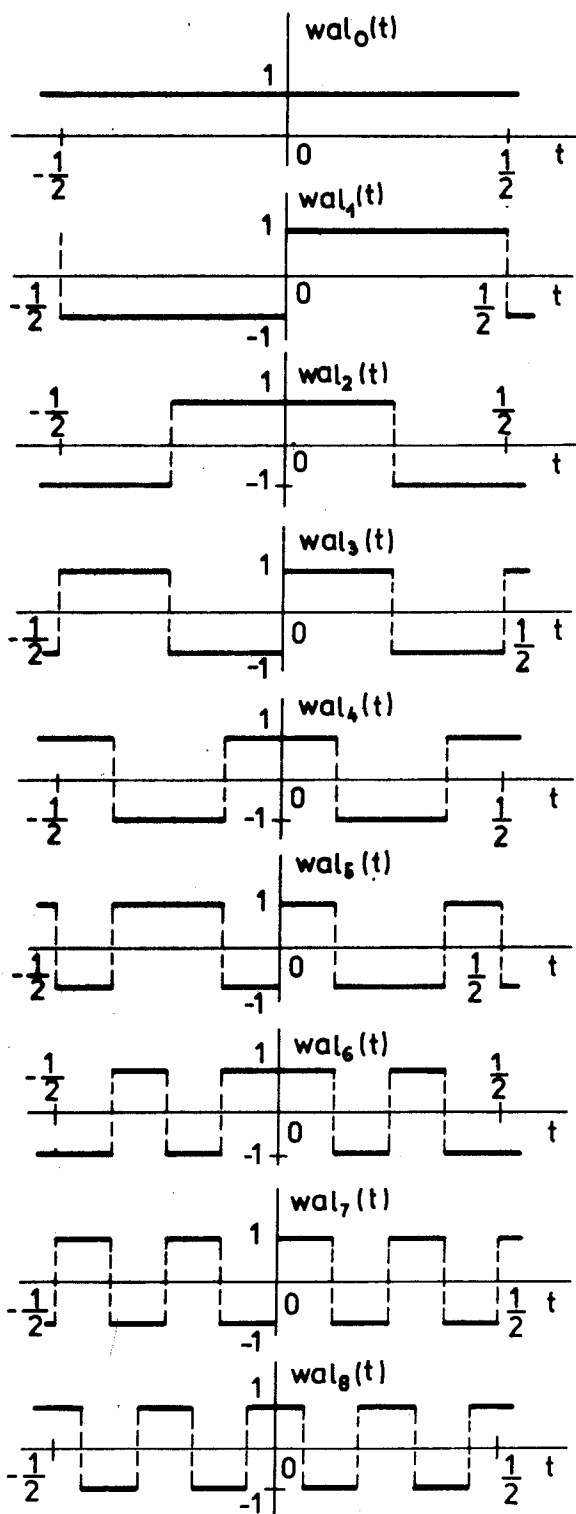
$< -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$ konečným součtem

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n \text{wal}_n(t),$$

(5.40)

kde zvolíme

$$N = 2^p; p = 0, 1, 2, \dots$$



Obr. 5.12

bude podle vlastnosti 4 dělit poslední z použitých funkcí interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ na N pravidelných dílů. Potom pro γ_n , $n = 0, 1, \dots, 2^p-1$ můžeme psát

$$\gamma_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{N}} \text{wal}_n(-\frac{1}{2} + 0) s(t) dt + \int_{-\frac{1}{2} + \frac{1}{N}}^{-\frac{1}{2} + \frac{2}{N}} \text{wal}_n(-\frac{1}{2} + \frac{1}{N} + 0) s(t) dt + \dots + \int_{-\frac{1}{2} + \frac{N-1}{N}}^{-\frac{1}{2}} \text{wal}_n(-\frac{1}{2} + \frac{N-1}{N} + 0) s(t) dt.$$

Protože hodnoty Walshových funkcí jsou ± 1 , můžeme psát

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{N-1} \text{wal}_n(-\frac{1}{2} + k\frac{1}{N} + 0) s_k, \quad (5.41)$$

kde s_k je integrál signálu na intervalu $[-\frac{1}{2} + \frac{k}{N}, -\frac{1}{2} + \frac{k+1}{N}]$

$$s_k = \int_{-\frac{1}{2} + \frac{k}{N}}^{-\frac{1}{2} + \frac{k+1}{N}} s(t) dt. \quad (5.42)$$

Výraz (5.41) můžeme pak napsat maticově

$$\boxed{[\gamma] = [W][s]} \quad (5.43)$$

kde $[\gamma]$ je sloupcová matice koeficientů γ

$$[\gamma]^T = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}], \quad N = 2^p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$[s]$ je sloupcová matice hodnot integrálů (5.42)

$$[s]^T = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}],$$

$[W]$ je čtvercová matice řádu N ,

$$[W] = \begin{bmatrix} \text{wal}_0(-\frac{1}{2} + 0), \text{wal}_0(-\frac{1}{2} + \frac{1}{N} + 0), \dots, & \text{wal}_0(-\frac{1}{2} + \frac{N-1}{N} + 0) \\ \text{wal}_1(-\frac{1}{2} + 0), \text{wal}_1(-\frac{1}{2} + \frac{1}{N} + 0), \dots, & \text{wal}_1(-\frac{1}{2} + \frac{N-1}{N} + 0) \\ \dots & \dots \\ \text{wal}_{N-1}(-\frac{1}{2} + 0), \text{wal}_{N-1}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{N} + 0), \dots, & \text{wal}_{N-1}(-\frac{1}{2} + \frac{N-1}{N} + 0) \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Násobíme-li (5.43) zleva inverzní maticí $[W]^{-1}$, dostaneme vektor hodnot (5.42). Protože střední hodnota signálu na intervalu $[-\frac{1}{2} + \frac{k}{N}, -\frac{1}{2} + \frac{k+1}{N}]$ je

$$\bar{s}_k = \frac{1}{\frac{1}{N}} \int_{-\frac{1}{2} + \frac{k}{N}}^{-\frac{1}{2} + \frac{k+1}{N}} s(t) dt = N s_k, \quad (5.45)$$

můžeme psát

$$[\bar{s}] = N [s] = N [W]^{-1} [\gamma], \quad (5.46)$$

kde $[\bar{s}]$ je sloupcový vektor středních hodnot (5.45),

$$[\bar{s}]^T = [\bar{s}_0, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{N-1}].$$

Protože se dá dokázat, že

$$[W]^{-1} = \frac{1}{N} [W]^T,$$

dostaneme pro sloupcový vektor středních hodnot

$$[\bar{s}] = [W]^T [\gamma]. \quad (5.47)$$

Vztahy (5.43) a (5.47) se někdy nazývají přímou a inverzní Walshovou transformací.

Lze nalézt rychlé algoritmy Walshovy transformace využívající podobné postupy jako FFT. Potřebné operace jsou pak jen sečítání a odečítání a transformaci lze realizovat poměrně jednoduchými elektronickými obvody. Přenosem transformovaného signálu můžeme dosáhnout snížení nároků na kapacitu sdělovacího kanálu [19].

Jako příklad uveďme aproximaci sinusového signálu

$$s(t) = \sin 2\pi t$$

prvními čtyřmi Walshovými funkcemi. V tomto případě je $N = 4$. Matice (5.44) má (viz obr. 5.12) tvar

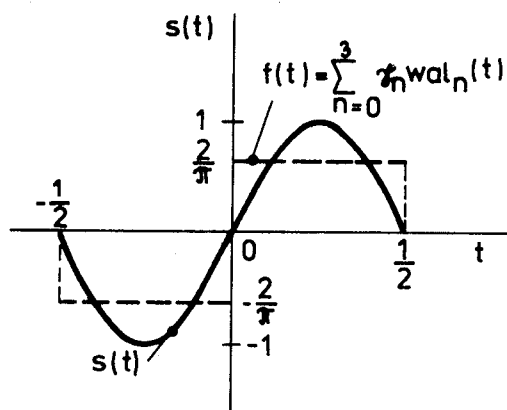
$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dále vypočítáme

$$s_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \sin 2\pi t dt = -\frac{1}{2\pi}$$

a podobně $s_1 = -\frac{1}{2\pi}$, $s_2 = \frac{1}{2\pi}$, $s_3 = \frac{1}{2\pi}$. Potom

$$[\gamma] = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Obr. 5.13

Z výsledku je zřejmé, že sinusovku aproximujeme první Walshovou funkcí, která je vážena střední hodnotou sinusovky (obr. 5.13).

5.2.9 Další ortogonální systémy. Ortonormalizace

Je známa řada dalších ortogonálních systémů. Jsou to např. polynomy Jacobiho, Legendrovy, Laguerrovy, Hermitovy a Čebyševovy. Popis jejich vlastností nalezne čtenář např. v [15]. Pro transformace signálů

mají kromě Walshových funkcí význam ještě funkce Haarovy.

Uveďme ještě, že ortogonální systémy lze získat ze systému lineárně nezávislých funkcí $\{f_n(t)\}$ na intervalu $\langle t_a, t_b \rangle$ Schmidtovým ortogonalizačním postupem [12].

Nejprve položíme

$$\eta_1(t) = f_1(t).$$

Funkci $\eta_2(t)$ budeme hledat ve tvaru

$$\eta_2(t) = f_2(t) + k_1 \eta_1(t),$$

kde k_1 určíme tak, aby η_2 byla ortogonální ke $\eta_1(t)$, tj.:

$$t_a \int_{t_a}^{t_b} f_2(t) \eta_1(t) dt + k_1 \int_{t_a}^{t_b} \eta_1(t) \eta_1(t) dt = 0.$$

Další funkci $\eta_3(t)$ hledáme jako

$$\eta_3(t) = f_3(t) + c_2 \eta_2(t) + c_1 \eta_1(t),$$

přičemž opět c_1 a c_2 určíme tak, aby byly splněny požadavky ortogonalit, tj.

$$t_a \int_{t_a}^{t_b} \eta_3(t) \eta_i(t) dt = 0 \quad i = 1, 2.$$

Získáme tak dvojici rovnic pro c_1 a c_2

$$t_a \int_{t_a}^{t_b} f_3(t) \eta_1(t) dt + c_2 \int_{t_a}^{t_b} \eta_2(t) \eta_1(t) dt + c_1 \int_{t_a}^{t_b} \eta_1(t) \eta_1(t) dt = 0,$$

$$\int_{t_a}^{t_b} f_3(t) \eta_2(t) dt + c_2 \int_{t_a}^{t_b} \eta_2(t) \eta_2(t) dt + c_1 \int_{t_a}^{t_b} \eta_1(t) \eta_2(t) dt = 0.$$

Opakováním tohoto postupu dostáváme systém ortogonálních funkcí, které můžeme ortonormalizovat.

5.2.10 Vztah mezi zobecněnou a komplexní Fourierovou řadou

Signál $s(t)$ můžeme vyjádřit pomocí báze $\{\eta_n(t)\}$ jako

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \eta_n(t).$$

Rozvineme-li signál do komplexní Fourierovy řady

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},$$

dostaneme pro koeficienty c_k

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \eta_n(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \eta_n(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n d_k^{(n)}, \end{aligned}$$

tj.

$$c_k = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n d_k^{(n)}.$$

~

(5.48)

Koeficient komplexní Fourierovy řady dostaneme z koeficientu γ_n zobecnělé řady a koeficientu $d_k^{(n)}$. Koeficient $d_k^{(n)}$ je koeficient k -té složky komplexní Fourierovy řady, do níž jsme rozvinuli n -tou funkci obecné báze $\eta_n(t)$. Nezávisí na signálu $s(t)$. Posloupnost $\{d_k^{(n)}\}_k$ představuje spektrum funkce $\eta_n(t)$, které může být složité. Z toho plyne užitečnost zobecnělé Fourierovy řady. Aproximace signálu $s(t)$ konečným součtem

$$\sum_{n=0}^k \gamma_n \eta_n(t)$$

často vyžaduje méně členů (příp. je přesnější) než aproximace konečným součtem komplexní Fourierovy řady.

6. N Á H O D N Ě S I G N Á L Y

U užitečných signálů nesoucích informaci často nemůžeme určit, jaké hodnoty v daném okamžiku budou nabývat, protože neznáme předem zprávu, kterou přenáší. Podobně u signálů rušivých nám není znám matematický výraz popisující závislost jejich hodnot na čase. Můžeme však určit průměrné hodnoty, jichž tyto signály nabývají, příp. relativní četnosti, s nimiž se vyskytují v určitém intervalu hodnot. Signály, u nichž neznáme výraz popisující závislost hodnot na čase, ale můžeme určit statistické parametry (např. pravděpodobnost, že hodnota bude v určitém intervalu), nazýváme náhodné.

V úvodních dvou odstavcích této kapitoly připomeneme (bez nároků na přesnost) základní pravidla počtu pravděpodobností, s nimiž se čtenář podrobně seznámil při studiu skripty [20].

6.1 N Á H O D N Ě J E V Y A J E J I C H P R A V D Ě P O D O B N O S T I

Idealizovaný výsledek pokusu nazýváme jev. Nerozložitelné výsledky pokusu nazýváme elementární jevy. Množinu Ω všech elementárních jevů, které se mohou při uskutečnění daného pokusu vyskytnout, nazýváme jevový prostor. Podmnožinám jevového prostoru odpovídají jevy složené. Určitý složený jev nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li některý z elementárních jevů, které mu odpovídají.

Jako příklad uveďme hrací kostku. Pokus spočívá v tom, že sledujeme čísla, která na ní padnou. Jeho idealizace spočívá v tom, že nepřipouštíme, aby kostka padla na hranu a nebyl znám výsledek. Jevový prostor má 6 elementárních jevů. Jev spočívající v tom, že padne sudé číslo, je jevem složeným, který nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li jeden ze tří elementárních jevů (padne 2, padne 4, padne 6). Jevu spočívajícímu v tom, že na kostce padne nula, neodpovídá žádný elementární jev, je jevem nemožným. Jevu spočívajícímu v tom, že na kostce padne liché nebo sudé číslo odpovídají všechny jevy jevového prostoru a je jevem jistým.

Pravděpodobnosti $P(E_i)$ elementárních jevů jsou ⁴nezáporná čísla přiřazená elementárním jevům E_i , $i = 1, 2, \dots$ tak, že jejich součet na celém jevovém prostoru je roven jedné

$$\sum_{E_i \in \Omega} P(E_i) = 1$$

Pravděpodobnost nemožného jevu V je nulová $P(V) = 0$, pravděpodobnost jistého jevu U je rovna jedné $P(U) = 1$.

Složený jev je tvořen několika jevy elementárními a jeho pravděpodobnost je rovna součtu pravděpodobností příslušných elementárních jevů.

Mějme dva jevy A a B . Jevu C spočívajícímu v tom, že nastane jev A nebo jev B (nebo oba dva jevy), odpovídá množina elementárních jevů daná sjednocením množin elementárních jevů odpovídajících jevům A a B . Jev C pak nazýváme sjednocením jevů A a B a píšeme $C = A \cup B$.

Jevu D spočívajícímu v tom, že nastane jev A i jev B odpovídají elementární jevy společné jevu A i jevu B . Odpovídá mu tedy množina elementárních jevů daná průnikem množin odpovídajících jevům A a B . Jev D nazýváme průnikem jevů A a B a píšeme $D = A \cap B$.

Předpokládejme, že víme, že nastal jev H . Ptejme se, jaká je, za této podmínky, pravděpodobnost uskutečnění jevu A . Tím, že nastal jev H , vylučujeme z původního jevového prostoru elementární jevy neodpovídající H a vytváříme nový jevový prostor odpovídající jevu H . Součet pravděpodobností elementárních jevů odpovídajících jevu H , tj. elementárních jevů tvořících nový jevový prostor, musí být opět roven jedné. Jejich hodnoty získáme z původních, dělíme-li je pravděpodobností jevu H . Potom pravděpodobnost $P(A|H)$ jevu A za podmínky, že nastal jev H , dostaneme jako součet pravděpodobností elementárních jevů odpovídajících jevu A i H přepočítaných na nový jevový prostor odpovídající jevu H , tj.

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \quad (6.1)$$

Jako příklad uveďme opět hrací kostku. Zřejmě je stejně pravděpodobné, které číslo padne, tudíž pravděpodobnost výskytu libovolného čísla je $1/6$. Víme-li, že padlo sudé číslo (jev H), změní se jevový prostor: mohla padnout jen čísla 2, 4, 6. Jejich pravděpodobnosti musíme přepočítat tak, aby součet byl roven jedné, tj. každou z nich dělit $P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = P(H)$. Sledujme jev A spočívající v tom, že číslo je dělitelné třemi. Zřejmě $P(A) = \frac{2}{6}$. Víme-li však, že nastal jev H , budeme počítat podle (6.1) $P(A|H) = (1/6)/(3/6) = 1/3$.

Vztah (6.1) udává hodnotu podmíněné pravděpodobnosti jevu A . Můžeme z něj určit pravděpodobnost průniku jevů A a B

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (6.2)$$

Jestliže jev B neovlivňuje jev A , tj. jevy A a B jsou nezávislé, musí být

$$P(A|B) = P(A).$$

Proto pravděpodobnost průniku nezávislých jevů (viz 6.2)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (6.3)$$

Ríkáme, že dva jevy A a B jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, je-li splněn vztah (6.3).

Pravděpodobnost sjednocení jevů A a B je dána součtem pravděpodobností odpovídajících elementárních jevů. Kdybychom psali $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, byly by dvakrát započteny pravděpodobnosti elementárních jevů společných jevům A i B ; musíme proto odečíst pravděpodobnost průniku jevů A a B , tj.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (6.4)$$

Pokud se jevy A a B vzájemně vylučují, tj. $A \cap B = \emptyset$, dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Jevu $\bar{A}$ opačnému k jevu A odpovídají všechny elementární jevy jevového prostoru kromě těch, které odpovídají jevu A . Potom také pravděpodobnost jevu $\bar{A}$ opačného k jevu A

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (6.5)$$

Výše uvedené vztahy pro výpočet pravděpodobnosti sjednocení a průniku dvou jevů lze rozšířit na obecný počet jevů. Vztahy zde uvedené odpovídají tzv. axiomatické nebo Kolmogorovově definici pravděpodobnosti, s níž se čtenář podrobně a přesně seznámil ve skriptu [20].

Je-li jevový prostor Ω tvořen N elementárními jevy, které jsou stejně pravděpodobné, tj.

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = \frac{1}{N},$$

nalezneme pravděpodobnost jevu A tak, že sečteme pravděpodobnosti všech elementárních jevů, které odpovídají jevu A . Předpokládejme, že podmínky jevu A splňuje n_A elementárních jevů. Potom pravděpodobnost jevu

$$P(A) = \sum_{E_i \in A} P(E_i) = \frac{n_A}{N}. \quad (6.6)$$

Vztah (6.6) se často používá při praktickém výpočtu pravděpodobností náhodných jevů. Bývá nazýván klasickou definicí pravděpodobnosti (ač požadavky na definici nesplňuje) a vyslovován takto: Pravděpodobnost jevu A je rovna poměru počtu jevů příznivých jevu A k celkovému počtu možných stejně pravděpodobných jevů.

U axiomatické definice pravděpodobnosti se předpokládají všechny možné jevy, které se mohou při pokusu vyskytnout a na základě předpokladů se jim přiřazují pravděpodobnosti - "šance" - že se tak stane. Není třeba pokus uskutečnit.

Předpokládejme nyní, že jsme N -krát uskutečnili pokus, přičemž se v n_A případech vyskytl jev A . Poměr

$$r_A^{(N)} = \frac{n_A}{N}$$

nazýváme relativní četností jevu A . S rostoucím N bude relativní četnost konvergovat k číslu

$$r_A = \lim_{N \rightarrow +\infty} r_A^{(N)}.$$

Jsou-li podmínky pokusu stejné jako podmínky, za nichž jsme stanovili jeho pravděpodobnost $P(A)$ (podle axiomatické definice), je pravděpodobnost, že se relativní četnost r_A bude lišit od pravděpodobnosti $P(A)$, nulová [20].

Z této skutečnosti vychází tzv. statistická definice pravděpodobnosti, která definuje pravděpodobnost jevu A jako číslo, k němuž konverguje relativní četnost jevu A .

Jevům $H_1, H_2, \dots, H_n$, z nichž vždy právě jeden nastane (tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$, $P(\bigcup H_i) = 1$) říkáme úplná soustava jevů. Předpokládejme, že známe pravděpodobnost $P(A|H_i)$ uskutečnění jevu A za podmínky, že nastal jev H_i , $i=1, 2, \dots, n$.

Protože

$$\bigcup (A \cap H_i) = A$$

a

$$H_i \cap H_j = \emptyset; \quad i \neq j$$

je pravděpodobnost uskutečnění jevu A bez ohledu na to, který z jevů H_i se vyskytl (viz (6.1))

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i) \quad .$$

(6.7)

Vztah (6.7) se nazývá vzorec úplné pravděpodobnosti a můžeme ho interpretovat následujícím způsobem. Uskutečňujeme pokus, při němž se s pravděpodobnostmi $P(H_i)$ mohou vyskytovat různé podmínky H_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Sledujeme výsledek A pokusu a víme, že za podmínek H_i nastane s pravděpodobností $P(A|H_i)$. Nevíme však, které podmínky při pokusu nastaly. Vztah (6.7) určuje pravděpodobnost, s níž se výsledek A vyskytl.

V radiotechnice se často vyskytuje poněkud pozměněná situace. Na základě výsledku A pokusu potřebujeme určit, jaké podmínky H_i platily v průběhu pokusu. Často postupujeme tak, že určujeme pravděpodobnosti $P(H_i|A)$ podmínek H_i , víme-li, že nastal výsledek A . Tvrdíme, že nastaly ty podmínky H_i , pro které je pravděpodobnost $P(H_i|A)$ největší. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti a podle (6.7)

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i)} \quad .$$

Vztah

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i)}$$

(6.8)

se nazývá Bayesův vzorec. Pověšme si, že v něm dvakrát vystupují pravděpodobnosti jevu (v naší interpretaci podmínek) H_i . Především je to $P(H_i)$ - pravděpodobnost nezávislá na uskutečnění pokusu, známá před pokusem - tj. pravděpodobnost apriorní. Dále je to $P(H_i|A)$, kterou můžeme určit až po uskutečnění pokusu - tj. pravděpodobnost aposteriorní.

Použití vzorce úplné pravděpodobnosti a Bayesova vzorce můžeme demonstrovat na následujícím příkladu [21].

Mějme sdělovací systém, skládající se ze zdroje, který produkuje zprávy "ano" a "ne" v podobě signálů "1" a "0" a dále ze sdělovacího kanálu s poruchami, které mohou zkreslit signál "1" na "0" a "0" na "1" a konečně z přijímače. Ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že se příjemce nedopustí chyby, prohlásí-li při příjmu signálu "1", že byla vyslána zpráva "ano". Statistické vlastnosti zdroje zpráv jsou takové, že se zprávy "ano" a "ne" vyskytují v poměru 5:3. Statistické vlastnosti sdělovacího kanálu jsou takové, že zkreslí 2/5 vysílaných zpráv "ano" a 1/3 vysílaných zpráv "ne" tak, že jsou přijaty zprávy opačné.

Při řešení příkladu můžeme označit jevy:

- H_0 - vyslána zpráva "ne",
- H_1 - vyslána zpráva "ano",
- A - přijat signál "1",
- $\bar{A}$ - přijat signál "0".

Známe apriorní pravděpodobnosti $P(H_0) = 3/8$, $P(H_1) = 5/8$.

Chceme stanovit aposteriorní pravděpodobnost $P(H_1|A)$ (a případně další tři) podle vztahu (6.8). K tomu potřebujeme stanovit ještě podmíněné pravděpodobnosti:

$P(A|H_1)$, tj. pravděpodobnost správného přenosu zprávy "ano" a

$P(A|H_0)$, tj. pravděpodobnost chybného přenosu zprávy "ne" jako signálu "1".

Podle zadání je zřejmé dáno

$$P(\bar{A}|H_1) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(A|H_0) = \frac{1}{3}.$$

Z toho

$$P(A|H_1) = 1 - P(\bar{A}|H_1) = \frac{3}{5}.$$

Nyní již lze použít (6.8) a vypočítat

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1) \cdot P(A|H_1)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Prohlásí-li příjemce signálu "1", že byla vyslána zpráva "ano", je jeho rozhodnutí správné s pravděpodobností $3/4$. Když prohlásí, že byla vyslána zpráva "ne", je jeho rozhodnutí správné s pravděpodobností $P(H_0|A) = 1/4$.

Všimněme si aposteriorních pravděpodobností pro případ vyslání zprávy "ne":

$$P(H_0|\bar{A}) = \frac{P(H_0) \cdot P(\bar{A}|H_0)}{P(H_0) \cdot P(\bar{A}|H_0) + P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

Přijme-li příjemce signál "0", je stejně pravděpodobné, že byla vyslána zpráva "ne" i "ano".

6.2 NÁHODNÉ VELIČINY

V předcházející kapitole jsme se zabývali náhodnými jevy. Při hodu kostkou byly jednotlivé stěny označeny počtem očí $K = 1, 2, \dots, 6$. Jev spočívající v tom, že padne některá stěna jsme mohli označit E_K . Souhrn všech elementárních jevů tvořil jevový prostor.

Místo o jednotlivé stěny hrací kostky se můžeme zajímat o počet očí - tedy přiřadit každému bodu jevového prostoru číslo K . Počet očí, který padne při vrhu kostky je náhodná veličina. Náhodnou veličinou budou i funkce $G(K) = K^2$, $H(K) = e^K$, kterými každému elementárnímu jevu E_K přiřazujeme hodnotu.

Funkci $X(E_K)$ s reálnými hodnotami, definovanou na jevovém prostoru s body E_K , nazýváme náhodnou veličinou, jestliže pro libovolné reálné x patří množina bodů E_K , pro které $X(E_K) < x$, ke třídě množin, pro které je definována pravděpodobnost (viz [20], [22]). Uvedená podmínka, tzv. měřitelnost X , je v praktických aplikacích téměř vždy splněna. Je nutná proto, že nerovnost $X(E_K) < x$ (např. počet očí na kostce je menší než 4,25) představuje náhodný jev a potřebujeme mu přiřadit pravděpodobnost.

Náhodné veličiny budeme dále značit velkými písmeny $X, Y, Z, \dots$ a jejich hodnoty odpovídajícími malými písmeny $x, y, z, \dots$.

6.2.1 Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny

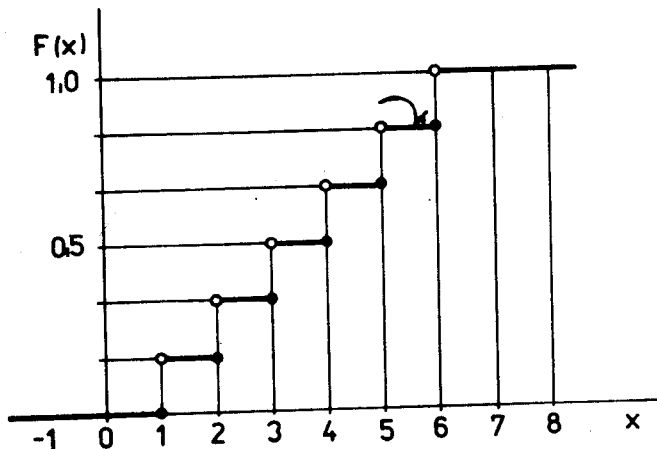
Náhodnou veličinu můžeme definovat jen pomocí jejích statických vlastností - např. určit s jakou pravděpodobností bude nabývat určitých hodnot. Základní charakteristikou náhodné veličiny je distribuční funkce.

Distribuční funkce náhodné veličiny X je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než x , tj.

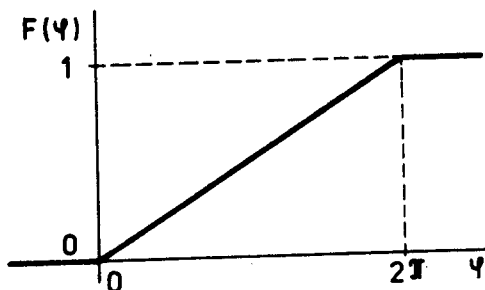
$$F_X(x) = P(X < x)$$

(6.9)

Často budeme psát jen $F(x) = P(X < x)$.



Obr. 6.1



Obr. 6.2

Na obr. (6.1) je je příklad distribuční funkce počtu očí, který padne při vrhu kostkou. Narůstá jen skoky, což je dáno tím, že náhodná veličina může nabývat jen diskrétních hodnot. Takovou náhodnou veličinu nazýváme diskrétní náhodnou veličinou.

Je-li distribuční funkce náhodné veličiny spojitá, nazýváme takovou náhodnou veličinu spojitou náhodnou veličinou [20].

Příkladem spojitě náhodné veličiny může být náhodně změřená fáze sinusového signálu (obr. 6.2).

Mohou existovat náhodné veličiny, které nejsou ani spojitě ani diskrétní, někteří autoři je nazývají smíšené náhodné veličiny [23]. Příklad je uveden na obr. 6.3. Máme-li oboustranný omezovač, u něhož závislost mezi vstupním a výstupním napětím je dána podle obr. 6.3b a na jehož vstup přivádíme náhodné napětí s distribuční funkcí podle obr. 6.3a, nemůže se na jeho výstupu nikdy objevit napětí

$u_{\text{výst}}$, pro které $|u_{\text{výst}}| > u_p$.

Jestliže vstupní napětí u_{vst} je $u_p < |u_{\text{vst}}| < u_o$, je výstupní napětí $+u_p$ nebo $-u_p$. Distribuční funkce má pak v bodech $\pm u_p$ nespojitost 1. druhu.

Distribuční funkce má zřejmě následující vlastnosti (a čtenář se s nimi podrobně seznámil při studiu [20]):

- 1) Distribuční funkce nabývá hodnot z intervalu $< 0, 1 >$ pro všechny

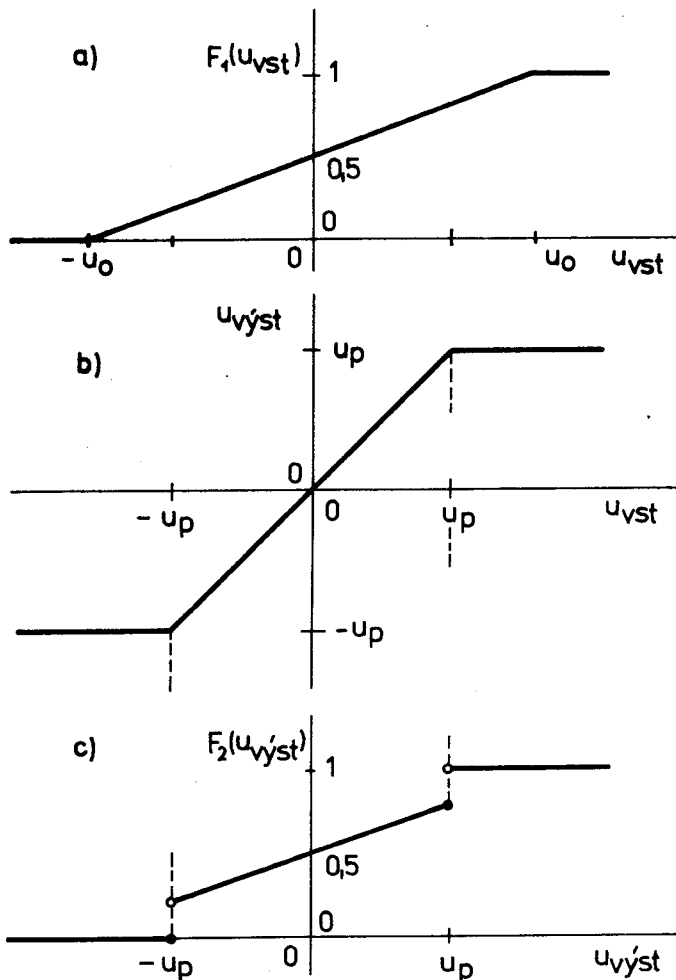
hodnoty argumentu.

- 2) Distribuční funkce je neklesající funkcí.
- 3) Distribuční funkce je v každém bodě spojitá zleva, (tj. limita zleva je rovna funkční hodnotě).
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ } (6.10)
- 5) Pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude určité hodnoty, je rovna skoku distribuční funkce, tj.

$$P(X = x) = F(x+0) - F(x) \quad (6.11)$$

- 6) Pravděpodobnost, že náhodná veličina leží v polouzavřeném intervalu $< x_1, x_2)$, je rovna rozdílu distribučních funkcí v bodech x_2 a x_1 tj.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (6.12)$$



Poznamenejme, že ve většině případů technické praxe se zabýváme spojitými náhodnými veličinami. V tomto případě je pravděpodobnost podle (6.11) nulová a ve výrazu (6.12) nezáleží na tom, zda je jedna z nerovností neostrá. U náhodných veličin jejichž distribuční funkce mají nespojitosti však je uspořádání nerovností v (6.12) podstatné.

U diskrétních náhodných veličin se k vyjádření distribuční funkce často používá jednotkového skoku podle (1.1) (až na to, že se definuje $\gamma(0)=0$) a píše se

$$F(x) = \sum_i p_i \gamma(x - x_i), \quad (6.13)$$

kde p_i je pravděpodobnost, s níž náhodná veličina nabývá hodnot x_i , $i = 1, 2, \dots$, tj.

Obr. 6.3

$$p_i = P(X = x_i) ; \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

Jako příklad můžeme uvést hrací kostku (obr. 6.1), kde $x_i = i$, $p_i = 1/6$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Někdy se pro distribuční funkci diskretní náhodné veličiny píše

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i .$$

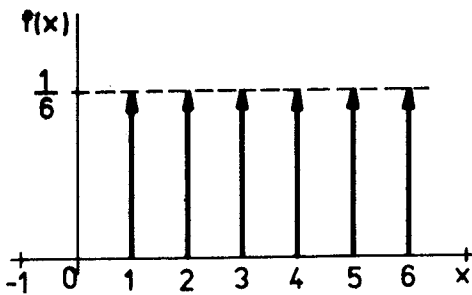
Kromě distribuční funkce používáme k popisu náhodných veličin hustotu pravděpodobnosti (někdy hustotu rozložení pravděpodobnosti nebo funkci rozložení pravděpodobnosti). U spojitých náhodných veličin je definována jako derivace distribuční funkce

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} . \quad (6.15)$$

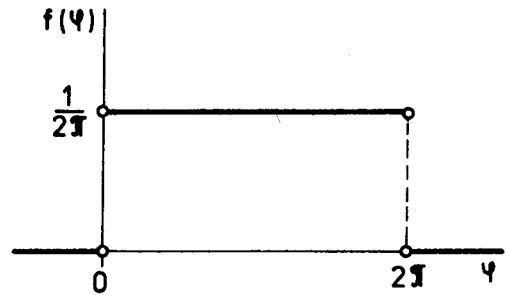
Nesnáž nastává u diskretních náhodných veličin. U nich se hustota pravděpodobnosti nahrazuje posloupností pravděpodobností, s nimiž náhodná veličina nabývá diskretních hodnot (tzv. frekvenční funkce [207]), nebo zavedeme Diracův impuls jako derivaci jednotkového skoku. Potom píšeme pro hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny s distribuční funkcí podle (6.13)

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) . \quad (6.16)$$

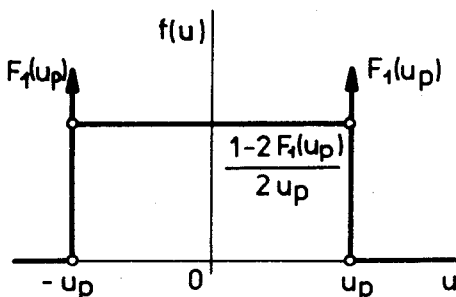
Na obr. 6.4, 6.5 a 6.6 jsou hustoty pravděpodobnosti odpovídající distribučním funkcím podle obr. 6.1, 6.2 a 6.3.



Obr. 6.4



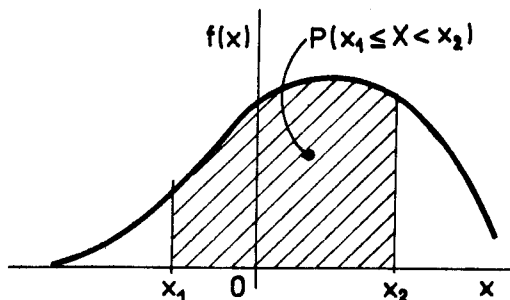
Obr. 6.5



Obr. 6.6

Hustota pravděpodobnosti má zřejmě následující vlastnosti:

- 1) je nezáporná funkce,
- 2) integrál
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad (6.17)$$
- 3) distribuční funkce se určí z hustoty pravděpodobnosti



Obr. 6.7

vyskytují jednotlivé hodnoty náhodné veličiny.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (6.18)$$

- 4) pravděpodobnost, že náhodná veličina leží v intervalu (x_1, x_2) je

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad (6.19)$$

viz obr. 6.7,

- 5) hustota pravděpodobnosti neudává pravděpodobnosti, s nimiž se

6.2.2 Číselné charakteristiky náhodných veličin

Distribuční funkce, příp. hustota pravděpodobnosti, zcela charakterizuje náhodnou veličinu. V praktických aplikacích se však obtížně určuje. Spokojujeme se proto často s tzv. číselnými charakteristikami, které postihují jen některé základní rysy náhodných veličin. K číselným charakteristikám patří obecné a centrální momenty.

Obecný moment k-tého řádu spojitě náhodné veličiny se definuje

$$M_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad (6.20)$$

diskrétní náhodné veličiny

$$M_k[X] = \sum_i x_i^k p_i. \quad (6.21)$$

Zvláštní význam má obecný moment 1. řádu, nazývaný střední hodnota. Značíme ho $E[X]$ nebo $\bar{x}$ a píšeme pro spojitou náhodnou veličinu

$$E[X] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (6.22)$$

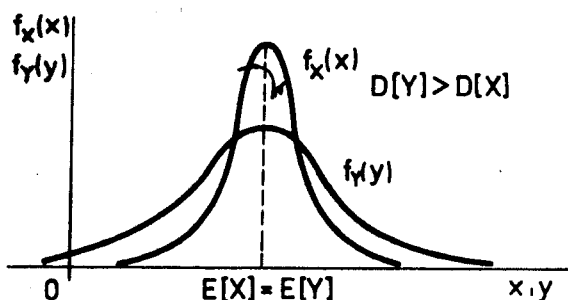
a pro diskrétní náhodnou veličinu

$$E[X] = \bar{x} = \sum_i x_i p_i. \quad (6.23)$$

Střední hodnotu můžeme chápat jako zobecnění aritmetického průměru. Při použití klasické definice pravděpodobnosti můžeme pravou stranu (6.23) přepsat jako $\sum x_i (n_i / N)$, kde n_i je počet výskytů hodnoty x_i , N je celkový počet hodnot, tj. $\sum n_i = N$. Potom pravá strana (6.23) odpovídá aritmetickému průměru. Přesnější interpretaci střední hodnoty podává Chinčinova věta, s níž se čtenář seznámil v [20] a podle níž je pravděpodobnost, že se pro velké N neliší aritmetický průměr od střední hodnoty, rovna jedné, tj. pro libovolné $\epsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - E[X] < \varepsilon\right) = 1. \quad (6.24)$$

Připomeneme ještě, že pokud je hustota pravděpodobnosti symetrická podle nějaké osy, odpovídá střední hodnota této ose (obr. 6.8).



Obr. 6.8

Čtenář se snadno může přesvědčit o následující základní vlastnosti střední hodnoty. Jsou-li c_1 a c_2 konstanty, je

$$E[c_1 + c_2 X] = c_1 + c_2 E[X] \quad (6.25)$$

(tedy střední hodnota konstanty je konstanta).

Druhý obecný moment náhodné veličiny se často nazývá střední kvadratická hodnota. Lze pro něj psát

$$M_2[X] = E[X^2] = \overline{x^2} \quad (6.26)$$

Pro obecné momenty lze psát

$$M_k[X] = E[X^k] = \overline{x^k}. \quad (6.27)$$

Střední hodnota je menšíhodné číslo (konstanta). Hodnoty náhodné veličiny jsou kolem ní soustředěny. Další číselné charakteristiky - tzv. centrální momenty udávají, jak mnoho je náhodná veličina soustředěna kolem střední hodnoty.

Odchylka náhodné veličiny od střední hodnoty $X - E[X]$ je náhodnou veličinou. Její k -té momenty nazýváme centrální momenty k -tého řádu náhodné veličiny X a píšeme pro ně u spojitých náhodných veličin

$$m_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^k f(x) dx, \quad (6.28)$$

u diskrétních náhodných veličin

$$m_k[X] = \sum_i (x_i - E[X])^k p_i. \quad (6.29)$$

Zřejmě můžeme obecně psát (jak pro diskrétní, tak pro spojité náhodné veličiny)

$$m_k[X] = E[(X - E[X])^k]. \quad (6.30)$$

Lze se snadno přesvědčit, že prvý centrální moment je roven nule

$$m_1[X] = E[(X - E[X])] = E[X] - E[E[X]] = 0$$

(to má i fyzikální interpretaci: náhodná veličina má odchylky od střední hodnoty "stejně často vpravo i vlevo").

Druhý centrální moment se nazývá rozptyl a můžeme pro něj psát podle (6.30)

$$D[X] = E[(X - E[X])^2] . \quad (6.31)$$

Čtenář snadno sám dokáže užitečný vztah

$$D[X] = E[X^2] - E^2[X] . \quad (6.32)$$

Příklad dvou náhodných veličin se stejnou střední hodnotou a různým rozptylem je na obr. 6.8.

Někdy zavádíme směrodatnou odchylku σ_X náhodné veličiny

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]} . \quad (6.33)$$

Snadno lze dokázat, že rozptyl konstanty je nulový (konstanta není náhodná a nemá proto žádný rozptyl) a obecněji, jsou-li c_1 a c_2 konstanty, že platí

$$D[c_1 X + c_2] = c_1^2 D[X] . \quad (6.34)$$

Interpretaci střední hodnoty a rozptylu podává také Čebyševova nerovnost. Má-li náhodná veličina konečný rozptyl, pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} . \quad (6.35)$$

Tedy pravděpodobnost, že odchylka náhodné veličiny od střední hodnoty je větší než ε , závisí nepřímo úměrně na kvadrátu ε a přímo úměrně na rozptylem.

6.2.3 Soustavy náhodných veličin

Často potřebujeme současně vyšetřovat několik náhodných veličin - např. signál na vstupu a výstupu sdělovacího kanálu. Zavádíme proto soustavy náhodných veličin (náhodné vektory, vícerozměrné náhodné veličiny).

Soustavou náhodných veličin budeme rozumět uspořádanou n-tici náhodných veličin $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Může např. udávat polohu náhodného bodu v n-rozměrném prostoru. Vlastnosti soustavy náhodných veličin popisujeme simultánní (n-rozměrnou) distribuční funkcí, příp. simultánní hustotu pravděpodobností.

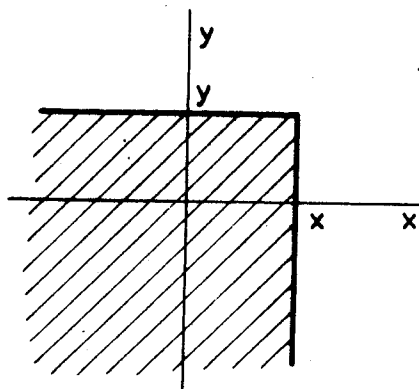
Simultánní distribuční funkce soustavy náhodných veličin je pravděpodobnost, že náhodné veličiny $X, Y, \dots$ jsou menší než argumenty distribuční funkce $x, y, \dots$

$$F(x, y, \dots, z) = P(X < x, Y < y, \dots, Z < z) . \quad (6.36)$$

Např. ¹simultánní distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y)$$

dvou náhodných veličin X, Y můžeme interpretovat jako pravděpodobnost, že náhodný bod bude ležet ve vyšrafovaném kvadrantu (obr. 6.9) určeném hodnotami x, y . (Abychom zdůraznili, kterých náhodných veličin se distribuční funkce týká, píšeme je někdy jako indexy).



Obr. 6.9

Obtíže s vyjádřením distribuční funkce nastávají u soustav diskrétních náhodných veličin. Známe-li pravděpodobnosti $P(X = x_i, Y = y_j, \dots, Z = z_k) = P(x_i, y_j, \dots, z_k)$ všech kombinací hodnot, jichž náhodné veličiny mohou nabýt, je distribuční funkce soustavy diskrétních náhodných veličin

$$F(x_1, y_1, \dots, z) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} \dots \sum_{z_k < z} P(x_i, y_j, \dots, z_k) \quad (6.37)$$

Pro případ soustavy dvou náhodných veličin je na obr. 6.10 uveden příklad distribuční funkce [22].

Simultánní distribuční funkce soustavy náhodných veličin má následující vlastnosti:

- 1) Její hodnoty jsou v intervalu $< 0, 1 >$.
- 2) Je neklesající zleva spojitou funkcí každé své proměnné.
- 3) Jestliže některý z argumentů $x_i \rightarrow -\infty$, je

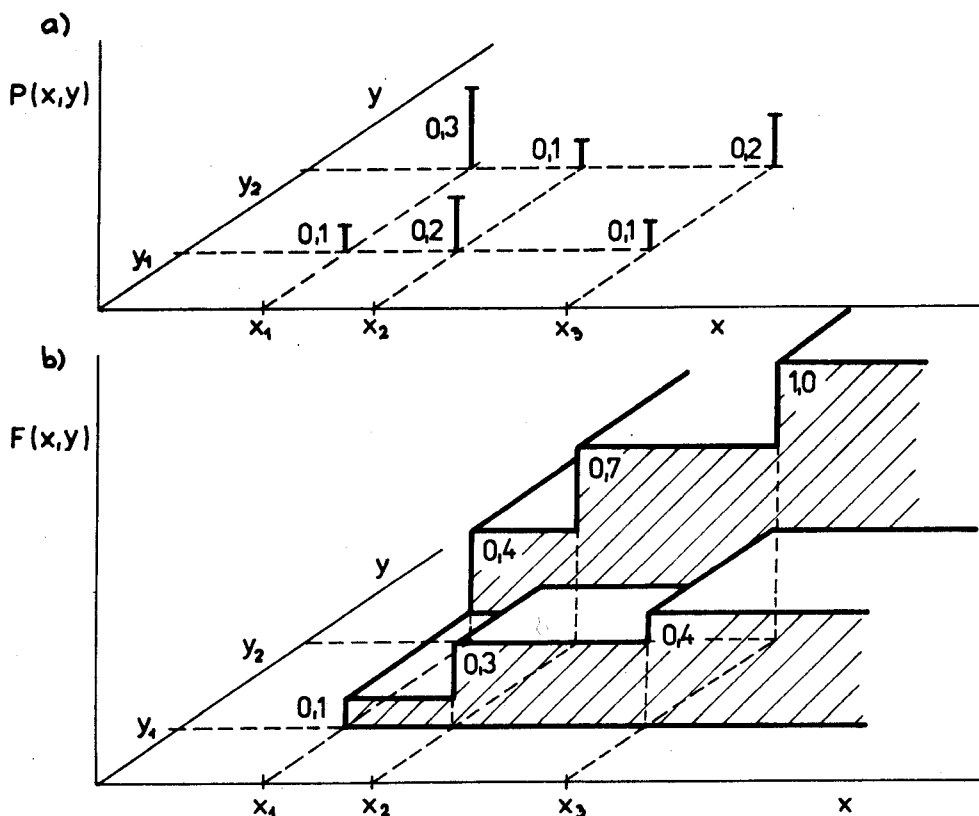
$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

Speciálně pro dvojici náhodných veličin

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0 \quad (6.38 a)$$

- 4) Jestliže některý z argumentů n rozměrné funkce roste nade všechny meze, dostáváme $(n-1)$ rozměrnou distribuční funkci. Speciálně pro dvojici náhodných veličin

$$\left. \begin{aligned} F_{X,Y}(x, +\infty) &= F_X(x) \\ F_{X,Y}(+\infty, y) &= F_Y(y) \\ F_{X,Y}(+\infty, +\infty) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.38 b)$$



Obr. 6.10

Simultánní hustotou pravděpodobnosti soustavy n -spojitých náhodných veličin rozumíme

$$f(x, y, \dots, z) = \frac{\partial^n}{\partial x \partial y \dots \partial z} F(x, y, \dots, z).$$

Simultánní hustotou pravděpodobnosti soustavy diskrétních náhodných veličin zpravidla rozumíme soubor pravděpodobností, s nimiž náhodné veličiny nabývají všech možných kombinací hodnot (např. obr. 6.10a).

Simultánní hustota pravděpodobnosti spojitéch náhodných veličin má následující vlastnosti:

- 1) Je nezápornou funkcí všech svých proměnných.
- 2) Integrací hustoty přes některou proměnnou tuto proměnnou vyloučíme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, \dots, X_k, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_k = \\ = f_{X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Speciálně pro dvě náhodné veličiny

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = f_X(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = f_Y(y),$$

viz obr. 6.11.

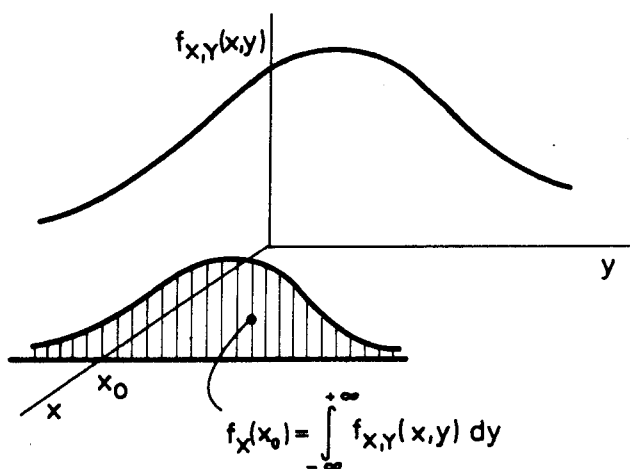
3) Integrál přes všechny hodnoty všech proměnných

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (6.40)$$

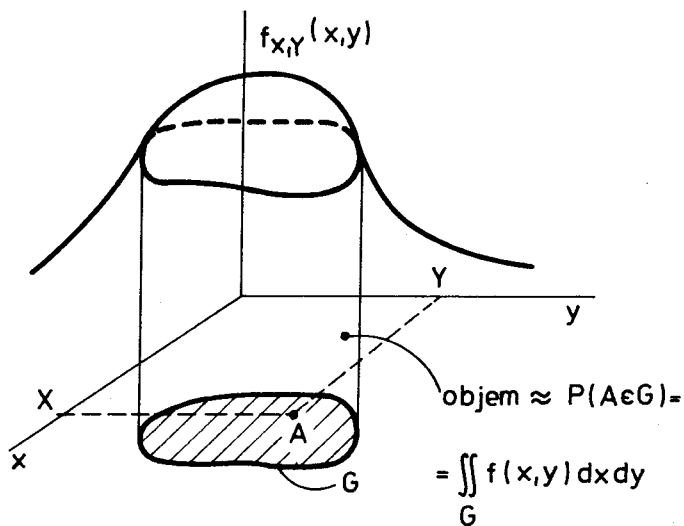
Pravděpodobnost $P(A)$ jevu, že bod A se souřadnicemi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jejichž hustota pravděpodobnosti je $f(x_1, \dots, x_n)$, padne do oblasti G je

$$P(A) = \int_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (6.41)$$

pro dvourozměrný případ je situace znázorněna na obr. 6.12.



Obr. 6.11



Obr. 6.12

V souladu s (6.3) budou náhodné veličiny X a Y nezávislé, platí-li

$$P(X < x \cap Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y),$$

tj.

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Derivováním podle x a y dostaneme hustotu pravděpodobnosti dvou nezávislých náhodných veličin

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Obecně platí, že náhodné veličiny jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, platí-li pro jejich simultánní distribuční funkce, resp. hustoty pravděpodobnosti

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n), \quad (6.42)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n). \quad (6.43)$$

6.2.4 Číselné charakteristiky soustav náhodných veličin

Máme-li soustavu spojitých náhodných veličin $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a chceme vypočítat střední hodnotu náhodné veličiny X_k , musíme simultánní hustotu pravděpodobnosti $(n-1)$ krát integrovat, abychom získali hustotu veličiny X_k (viz (6.39)). Po n -té integrujeme, abychom získali samotnou střední hodnotu. Tedy

$$E[X_k] = \bar{x}_k = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ - krát}} x_k f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (6.44)$$

Podobně pro rozptyl

$$\begin{aligned} D[X] &= E[(X - \bar{x}_k)^2] = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ - krát}} (x_k - \bar{x}_k)^2 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Pro diskrétní náhodné veličiny

$$E[X_k] = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} x_k P(x_1, \dots, x_n), \quad (6.46)$$

$$D[X_k] = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} (x_k - \bar{x}_k)^2 P(x_1, \dots, x_n). \quad (6.47)$$

Čtenář si jistě sám odvodí vztahy pro výpočet obecného a centrálního momentu náhodné veličiny X_k .

Kromě obecných a centrálních momentů jednotlivých náhodných veličin se definují také smíšené momenty.

Smíšeným obecným momentem řádu $(i+j)$ náhodných veličin X_p, X_q rozumíme střední hodnotu součinu

$$M_{i+j}[X_p, X_q] = E[X_p^i \cdot X_q^j]. \quad (6.48)$$

Smíšeným centrálním momentem řádu $(i+j)$ náhodných veličin X_p, X_q rozumíme střední hodnotu součinu odchylek

$$m_{i+j}[X_p, X_q] = E[(X_p - \bar{x}_p)^i (X_q - \bar{x}_q)^j]. \quad (6.49)$$

Čtenář by si snadno sám odvodil tvar vztahů (6.48) a (6.49) pro případ spojitých a diskrétních náhodných veličin. Zvláštní význam ze smíšených momentů má centrální moment druhého řádu, který se nazývá kovariance náhodných veličin X_p a X_q .

$$\boxed{\text{Cov}[X_p, X_q] = E[(X_p - \bar{x}_p)(X_q - \bar{x}_q)]} \quad (6.50)$$

Všimněme si kovariance spojitých nezávislých náhodných veličin. V tomto případě, budeme-li respektovat (6.43),

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_p, X_q] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_p - \bar{x}_p)(x_q - \bar{x}_q) f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_p - \bar{x}_p) f_{X_p}(x_p) dx_p \int_{-\infty}^{+\infty} (x_q - \bar{x}_q) f_{X_q}(x_q) dx_q. \end{aligned}$$

Poslední dva integrály představují první centrální momenty, které (viz 6.30) jsou nulové. Kovariance nezávislých náhodných veličin je tedy nulová. Je třeba zdůraznit, že opačné tvrzení obecně neplatí.

Budou-li naopak náhodné veličiny X_p a X_q zcela závislé, přejde (6.50) na rozptyl

$$\text{Cov}[X_p, X_p] = E[(X_p - \bar{x}_p)^2] = D[X_p].$$

Jako míra závislosti náhodných veličin poslouží korelační koeficient $r[X_p, X_q]$

$$\boxed{r[X_p, X_q] = \frac{\text{Cov}[X_p, X_q]}{\sqrt{D[X_p] \cdot D[X_q]}}} \quad (6.51)$$

jehož hodnoty leží v intervalu $< -1, 1 >$. Pro nezávislé náhodné veličiny je nulový, pro náhodné veličiny lineárně závislé dosahuje maximálních hodnot. Náhodné veličiny, pro které je korelační koeficient nulový (a také kovariance), nazýváme nekorelované. Připomeňme, že nekorelované náhodné veličiny nemusí být

nezávislé.

Snadno lze ověřit vztah

$$\text{Cov}[X_p, X_q] = E[X_p X_q] - E[X_p]E[X_q], \quad (6.52)$$

z něhož dostaneme pro střední hodnotu součinu náhodných veličin

$$E[X_p X_q] = E[X_p]E[X_q] + \text{Cov}[X_p, X_q]. \quad (6.53)$$

Jsou-li náhodné veličiny nezávislé, je střední hodnota jejich součinu rovna součinu středních hodnot.

Protože platí pro funkci G náhodných veličin (viz 6.76)

$$E[G(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) f(x, y) dx dy,$$

můžeme napsat pro střední hodnotu součtu náhodných veličin spojitých

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = E[X] + E[Y]. \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme pro diskrétní náhodné veličiny a obecně platí, že střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu středních hodnot, tj.

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]. \quad (6.54)$$

Pro rozptyl součtu náhodných veličin dostaneme podle (6.31) a (6.54)

$$\begin{aligned} D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_i)\right)^2\right] = \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_i)^2 + \sum_{(i,j)} (X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^n E[(X_i - \bar{x}_i)^2] + 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ i < j}} E[(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)]. \end{aligned}$$

Ve druhé sumě sečítáme přes všechny dvojice (i, j) , přičemž dvojice (i, j) a (j, i) počítáme jen jednou. Dosaďme-li (6.31) a (6.50) zjistíme, že rozptyl součtu náhodných veličin je roven součtu rozptylů zvětšenému o dvojnásobek všech kovariancí

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D[X_i] + 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ i < j}} \text{Cov}[X_i, X_j]. \quad (6.55)$$

Rozptyl součtu nezávislých náhodných veličin je roven součtu rozptylů.

6.2.5 Podmíněná distribuční funkce, podmíněná hustota pravděpodobnosti.

Podmíněné číselné charakteristiky

Jsou-li náhodné veličiny X a Y závislé, existuje podmíněná pravděpodobnost, že $Y < y$, je-li $x_1 \leq X < x$. Podle (6.1) můžeme psát

$$P(Y < y | x_1 \leq X < x) = \frac{P(x_1 \leq X < x \cap Y < y)}{P(x_1 \leq X < x)}.$$

Pravděpodobnosti můžeme vyjádřit podle (6.41) a dostaneme

$$P(Y < y | x_1 \leq X < x) = \frac{\int_{x_1}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dy dx}{\int_{x_1}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx}.$$

Limitním přechodem $x_1 \rightarrow x$ dostaneme podmíněnou distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(y|x) &= P(Y < y | X = x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} P(Y < y | x_1 \leq X < x) = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^y f(x, y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy} = \frac{\int_{-\infty}^y f(x, y) dy}{f_X(x)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

a budeme-li ji derivovat podle y , dostaneme podmíněnou hustotu pravděpodobnosti

$$f(y|x) = \frac{\partial F(y|x)}{\partial y} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

(6.57)

Podmíněná hustota pravděpodobnosti má všechny vlastnosti, které má nepodmíněná hustota a to zejména

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x) dy = 1$$

(6.58)

o čemž se lze přesvědčit integrováním (6.57). Dále z (6.57) plynou často užívané vztahy

$$f(x, y) = f(x|y) \cdot f_Y(y) \quad (6.59)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y) \cdot f_Y(y) dy. \quad (6.60)$$

Vztah (6.57) odpovídá definici podmíněné pravděpodobnosti (6.1), vztah (6.60) vzorec úplné pravděpodobnosti (6.7). Potřebujeme ještě najít analogii Bayesova vzorce (6.8) pro spojité náhodné veličiny. Dosazením (6.59) a (6.60) do (6.57) dostaneme

$$f(y|x) = \frac{f_Y(y)f(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)f(x|y) dy} , \quad (6.61)$$

tj. výraz pro určení aposteriorní hustoty pravděpodobnosti $f(y|x)$, známe-li apriorní hustotu $f_Y(y)$.

Můžeme zavést i podmíněné číselné charakteristiky. Podmíněná střední hodnota náhodné veličiny Y za podmínky, že $X=x$ je

$$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dy}{f_X(x)} . \quad (6.62)$$

Neopak násobením $f_X(x)$ a integrováním (6.62) dostaneme nepodmíněnou střední hodnotu

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[Y|x] f_X(x) dx . \quad (6.63)$$

Podobně pro podmíněný rozptyl můžeme psát

$$\begin{aligned} D[Y|x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[Y|x])^2 f(y|x) dy = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[Y|x])^2 f(x,y) dy}{f_X(x)} . \end{aligned} \quad (6.64)$$

6.2.6 Transformace náhodných veličin

Náhodná veličina je často vstupní veličinou soustavy, která ji transformuje na výstupní veličinu vztahem

$$Y = G(X) , \quad (6.65)$$

viz obr. 6.13.

Předpokládejme nejprve, že k funkci G existuje jednoznačná inverzní funkce G . Platí zřejmě rovnost pravděpodobnosti, že se náhodné veličiny nacházejí v intervalech $< x_0, x_0 + dx)$ a $< y_0, y_0 + dy)$

$$P(x_0 \leq X < x_0 + dx) = P(y_0 \leq Y < y_0 + dy) .$$

Pro malé přírůstky dx a dy můžeme tyto pravděpodobnosti vyjádřit

$$f_X(x) dx = f_Y(y) dy ,$$

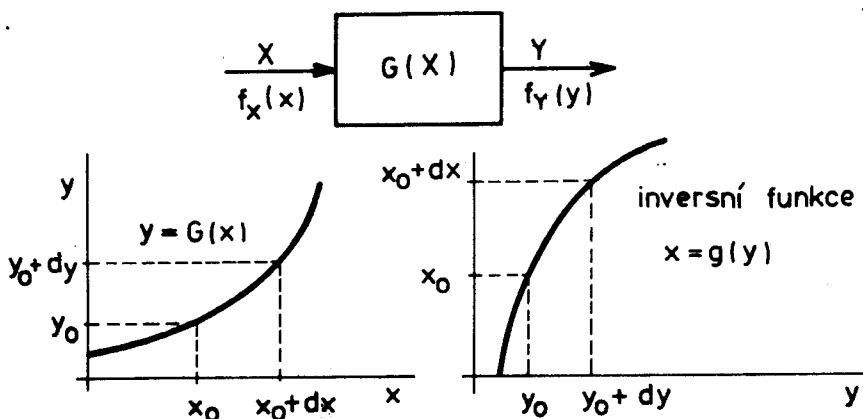
z čehož

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| .$$

Absolutní hodnotu jsme zavedli proto, že poměr přírůstků může být záporný, ale hustota pravděpodobnosti je nezáporná funkce. Hodnoty x jsou dány inverzní funkcí $x = g(y)$ a proto hustota pravděpodobnosti na výstupu soustavy je

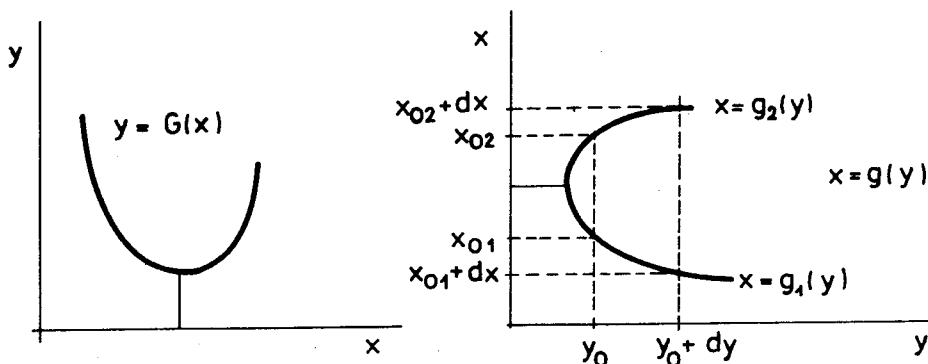
$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dg(y)}{dy} \right|$$

(6.66)



Obr. 6.13

Je-li soustava charakterisována funkcí G , která nemá jednoznačnou inverzní funkci g , musíme inverzní funkci rozdělit na jednoznačné větve $g_1, g_2, \dots$ (obr. 6.14).



Obr. 6.14

Protože výskyty náhodné veličiny X v jednotlivých intervalech $x_{01} + dx_1, x_{02} + dx_2, \dots$ se vzájemně vylučují, je pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny Y v intervalu $y_0 + dy$ rovna součtu pravděpodobností

$$P(y_0 \leq Y < y_0 + dy) = P(x_{01} \leq X < x_{01} + dx_1) + P(x_{02} \leq X < x_{02} + dx_2) + \dots$$

Pro malé přírůstky můžeme opět psát

$$f_Y(y) dy = f_X(x_1) dx_1 + f_X(x_2) dx_2 + \dots,$$

což dá

$$f_Y(y) = f_X(x_1) \left| \frac{dg_1(y)}{dy} \right| + f_X(x_2) \left| \frac{dg_2(y)}{dy} \right| + \dots, \quad (6.67)$$

kde

$$x_1 = g_1(y), \quad x_2 = g_2(y), \dots$$

Jako příklad uvedme kvadratickou transformaci $Y = X^2$. Tato transformace má dvojznačnou inverzní funkci

$$x = g_1(y) = \sqrt{y},$$

$$x = g_2(y) = -\sqrt{y}.$$

Hodnoty $y < 0$ se nevyskytují. Proto je hustota pravděpodobnosti transformované náhodné veličiny po dosazení do (6.67)

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + f_X(x) \left| \frac{1}{-2\sqrt{y}} \right|.$$

Po dosazení za x dostaneme výsledek

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & ; \quad y > 0 \\ 0 & ; \quad y < 0 \end{cases}$$

Budeme-li tedy na vstup kvadratického systému $Y = X^2$ přivádět hodnoty s normálním rozložením

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

budou na jeho výstupu hodnoty náhodné veličiny s rozložením

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8\pi y}\sigma} \left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-a)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}+a)^2}{2\sigma^2}} \right] & ; \quad y > 0, \\ 0 & ; \quad y < 0. \end{cases}$$

Často se setkáváme s transformací typu

$$y = \begin{cases} G(x) & , \quad x \geq x_0, \\ 0 & , \quad x < x_0. \end{cases} \quad (6.68)$$

V tom případě se hodnoty $x \in (-\infty, 0)$ transformují na jedinou hodnotu $y = 0$ s pravděpodobností

$$\int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) dx.$$

Prote transformovaná hustota pravděpodobnosti (za předpokladu, že $G(x)$ je monotónní rostoucí funkce)

$$f_Y(y) = \delta(y) \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) dx + f_X(x) \frac{dg(y)}{dy}. \quad (6.69)$$

Všimněme si nyní transformace simultánních hustot pravděpodobnosti. Předpokládejme nejprve dvourozměrný případ, kdy transformujeme hustotu $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_X(x_1, x_2)$ vztahem

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= G_1(X_1, X_2) \\ Y_2 &= G_2(X_1, X_2) \end{aligned} \right\} \quad (6.70)$$

na náhodné veličiny s hustotou pravděpodobnosti $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_Y(y_1, y_2)$. Inverzní transformace

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= g_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 &= g_2(Y_1, Y_2) \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

nemusí být jednoznačná. Větvě transformace g_1 označíme $g_{11}, g_{12}, \dots$, větvě transformace g_2 označíme $g_{21}, g_{22}, \dots$. Je-li bod A (obr. 6.15) v oblasti dS , může být transformovaný bod buď v oblasti $ds_1, ds_2, \dots$. Tyto případy se vzájemně vylučují a proto pravděpodobnost, že bod X_1, Y_2 je v oblasti dS je rovna součtu pravděpodobností, že bod (X_1, X_2) je v oblasti $ds_1, ds_2, \dots$, tj.

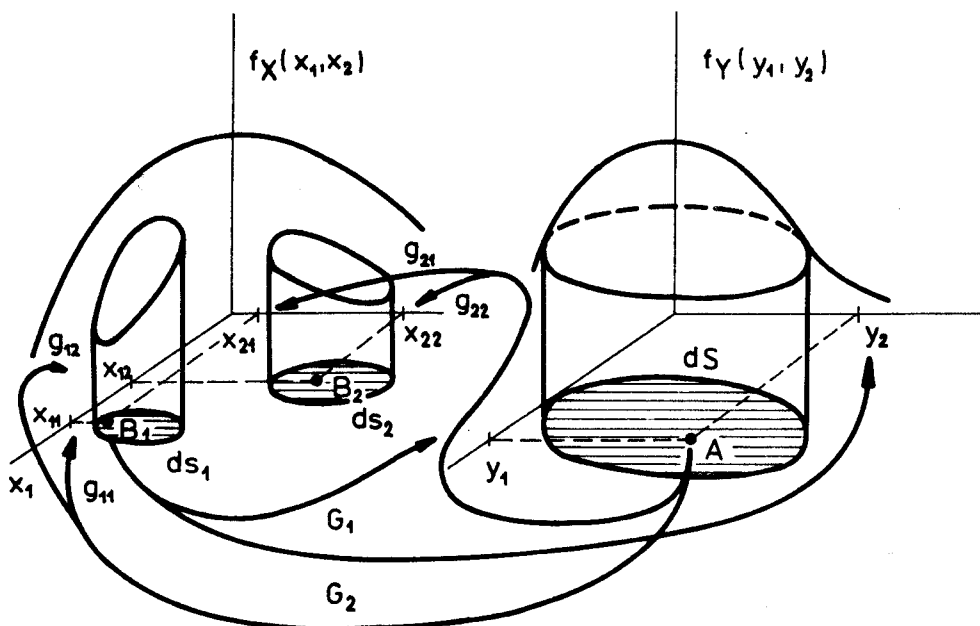
$$P(A \in dS) = P(B \in ds_1) + P(B \in ds_2) + \dots,$$

což pro infinitesimálně malé $dS, ds_1, ds_2, \dots$ dá podle (6.41)

$$f_Y(y_1, y_2) dS = f_X(x_{11}, x_{21}) ds_1 + f_X(x_{12}, x_{22}) ds_2 + \dots$$

a tedy

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(x_{11}, x_{21}) \left| \frac{ds_1}{dS} \right| + f_X(x_{12}, x_{22}) \left| \frac{ds_2}{dS} \right| + \dots$$



Obr. 6.15

Poměr elementárních ploch při přechodu z proměnných (x_1, x_2) na proměnné (y_1, y_2) je dán jacobíánem transformace

$$\frac{ds}{dS} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

a tedy

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(x_{11}, x_{12}) \left| \frac{\partial(x_{11}, x_{12})}{\partial(y_1, y_2)} \right| + f_X(x_{12}, x_{22}) \left| \frac{\partial(x_{12}, x_{22})}{\partial(y_1, y_2)} \right| + \dots \quad (6.72)$$

kde

$$\begin{aligned} x_{11} &= g_{11}(y_1, y_2), \\ x_{12} &= g_{12}(y_1, y_2), \\ x_{21} &= g_{21}(y_1, y_2), \\ x_{22} &= g_{22}(y_1, y_2) \dots \end{aligned}$$

Jako příklad transformace simultánní hustoty pravděpodobnosti uveďme převod náhodných pravouhlých souřadnic do souřadnic polárních. Předpokládejme, že máme v rovině náhodný bod, jehož pravouhlé souřadnice jsou náhodné veličiny X , Y s hustotou pravděpodobnosti $f_X(x, y)$ a chceme určit hustotu pravděpodobnosti $f_R(r, \varphi)$ jeho polárních souřadnic R , φ . Vztahy mezi souřadnicemi jsou

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ \Phi &= \arctg(Y/X). \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

Transformace je jednoznačná, přičemž náhodná veličina R může nabývat jen kladných hodnot, hodnoty náhodné veličiny Φ jsou v intervalu $< 0, 2\pi$ (bereme hlavní hodnotu arkustangenty). Inversní transformace má tvar

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \Phi, \\ Y &= R \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Jacobián transformace je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

a tedy podle (6.72) dostáváme simultánní rozložení R a Φ

$$\left. \begin{aligned} f_R(r, \varphi) &= r f_X(x, y) = r f_X(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \\ r &> 0, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

(Další rozšíření tohoto příkladu je v odstavci 6.2.7).

Uvedme ještě, že transformace dvou náhodných veličin lze použít k určení střední hodnoty funkce náhodné veličiny a hustoty součtu, rozdílu, součinu a podílu náhodných veličin.

Mějme hustotu pravděpodobnosti $f_X(x)$ náhodné veličiny X a hledejme střední hodnotu veličiny $Y = G(X)$. Je-li inverzní funkce $X = g(Y)$ jednoznačná, dostaneme

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) f_X(x) \frac{dx}{dy} dy,$$

tj.

$$\boxed{E[G(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) f(x) dx.} \quad (6.76)$$

Postup pro určení hustoty pravděpodobnosti $f_Y(y)$ součtu, rozdílu, součinu a podílu náhodných veličin X_1, X_2 , známe-li jejich simultánní hustotu pravděpodobnosti $f_X(x_1, x_2)$, lze nalézt v [20], [21]. Dostaneme:

1) pro součet náhodných veličin $Y = X_1 + X_2$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u, y-u) du \quad (6.77)$$

a speciálně pro případ, že X_1 a X_2 jsou nezávislé s hustotami

$$f_1(x) \quad \text{a} \quad f_2(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-u) f_2(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(y-u) du, \quad (6.78)$$

2) pro rozdíl $Y = X_1 - X_2$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u, y+u) du, \quad (6.79)$$

3) pro součin $Y = X_1 \cdot X_2$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u|} f_X(u, \frac{y}{u}) du, \quad (6.80)$$

4) pro podíl $Y = X_2 / X_1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| f_X(u, uy) du. \quad (6.81)$$

6.2.7 Některé typy rozložení náhodných veličin

Náhodné veličiny lze podle funkčního tvaru hustoty pravděpodobnosti rozdělit do tříd. Uvnitř třídy se od sebe rozlišují jen parametry hustot pravděpodobnosti. O hustotě pravděpodobnosti příslušející určité třídě náhodných veličin budeme hovořit jako o rozložení pravděpodobnosti. V této kapitole se budeme zabývat nejčastějšími případy rozložení pravděpodobnosti.

Binomické (Bernoulliho) rozložení

Provádějme posloupnost n nezávislých pokusů. V každém pokusu se může vyskytnout jev A s pravděpodobností $P(A)=p$. Pravděpodobnost, že se jev nevyskytne je $q = 1-p$. Počet K pokusů, v nichž se jev vyskytne, představuje diskrétní náhodnou veličinu. Pravděpodobnost, že $K=k$ je dáno tzv. Bernoulliho vzorcem

$$P(k; p, n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad (6.82)$$

který pro $k = 0, 1, 2, \dots, n$ představuje hustotu pravděpodobnosti.
Střední hodnota

$$E[K] = n \cdot p,$$

rozptyl

$$D[K] = n \cdot p \cdot q.$$

Pro větší hodnoty n se $P(k; p, n)$ obtížně počítá a aproximuje se Poissonovým nebo Gaussovým rozložením (viz [21]).

Poissonovo rozložení

Poissonovo rozložení se spojuje s představou toku jevů, tj. jevů, které se opakovaně vyskytují. Jestliže počet jevů nezávisí na volbě počátku času (tok je stacionární), jestliže výskyt jevů v jednom okamžiku neovlivňuje výskyt jevů v okamžiku jiném (tok je nezávislý) a konečně je-li zanedbatelně pravděpodobné, že se současně vyskytne více jevů než jeden (tok je ordinární), je počet K jevů, které se vyskytnou za dobu τ , diskrétní náhodnou veličinou, která má Poissonovo rozložení. To je předepsáno vztahem

$$P(k, \tau) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(\gamma \tau)^k}{k!} e^{-\gamma \tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.83)$$

kde λ je střední počet jevů za dobu τ , γ je střední počet jevů za jednotku času. U tohoto rozložení je střední hodnota rovna rozptylu

$$E[K] = D[K] = \lambda.$$

Rovnoměrné rozložení

Spojité náhodná veličina, která se vyskytuje jen v intervalu (a, b) , přičemž pravděpodobnosti jejího výskytu uvnitř stejně velkých podintervalů v (a, b) jsou stejné, má rovnoměrné rozložení

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \quad x \in (a, b) \\ 0 & ; \quad x \notin (a, b) \end{cases}, \quad (6.84)$$

Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny s rovnoměrným rozložením je

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad (6.85)$$

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (6.86)$$

Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce jsou na obr. 6.16.

Normální (Gaussovo) rozložení

Náhodná veličina s normálním rozložením má hustotu pravděpodobnosti popsanou vztahem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

(6.87)

viz obr. 6.17.

Často se říká, že normální rozložení se v přírodě nejčastěji vyskytuje. Toto tvrzení má svůj původ v centrální limitní větě, s níž se čtenář seznámil ve [20], a která se někdy vyslovuje takto [13]: Nechť $X_1, X_2, \dots, X_M$ jsou

nezávislé náhodné veličiny a Y je jejich součet. Jestliže je M velké, hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny Y se blíží normálnímu rozložení a nezávisí na rozložení jednotlivých složek, pakliže příspěvek každé složky k součtu je ve srovnání s ním malý. Jako příklad uveďme, že součet několika málo (asi 10) náhodných veličin s rovnoměrným rozložením dobře aproximuje náhodnou veličinu s normálním rozložením [21]. Velmi často se předpokládá, že šum má normální rozložení pravděpodobnosti.

Pro střední hodnotu a rozptyl normálního rozložení platí

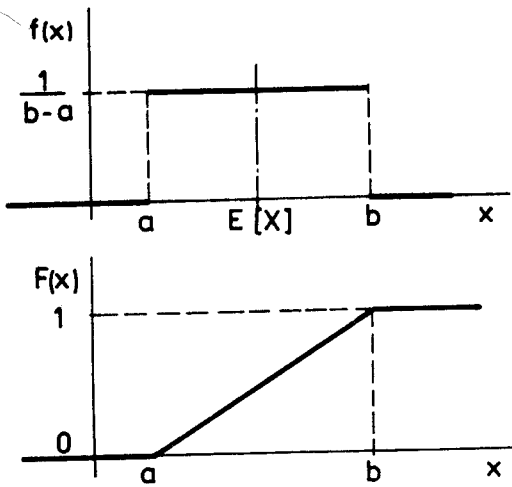
$$E[X] = a,$$

$$D[X] = \sigma^2.$$

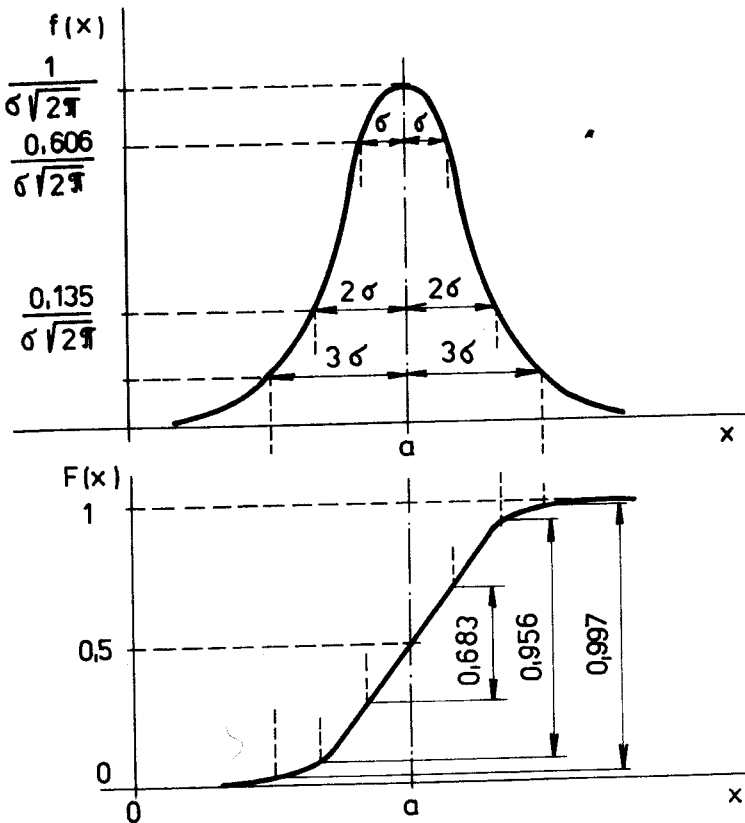
$$(6.88)$$

Čím je větší rozptyl náhodné veličiny, tím je průběh hustoty pravděpodobnosti méně strmý (obr. 6.17). Z obr. 6.17 je dále zřejmé, že hodnoty jsou soustředěny kolem střední hodnoty v pásu $\pm 3\sigma$ s pravděpodobností 0,997.

Jisté nesnáze vznikají s výpočtem hodnoty distribuční funkce



Obr. 6.16



Obr. 6.17

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz, \quad (6.89)$$

protež řešení integrálu v analytickém tvaru neexistuje. Tabuluje se proto funkce (někdy se nazývá Laplaceova)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (6.90)$$

Snadno se lze přesvědčit, že pro libovolné normální rozložení s parametry (6.88) je možné psát

$$F(x) = P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (6.91)$$

Argumentem funkce Φ je rozdíl náhodné veličiny a její střední hodnoty vyjádřený v počtu směrodatných odchylek.

Lze ukázat, že lineární transformace normálního rozložení dá opět normální rozložení [22].

Simultánní normální rozložení

Soustava náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n$ má simultánní normální rozložení, platí-li pro simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \exp\left[-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{x_i - a_i}{\sigma_i} \frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right], \quad (6.92)$$

kde

$$a_i = E[X_i],$$

$$\sigma_i^2 = D[X_i],$$

D je determinant n-tého řádu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

r_{ik} je korelační koeficient, $r_{ik} = r_{ki}$, $|r_{ik}| \leq 1$,

D_{ik} je algebraický doplněk prvku r_{ik} determinantu D.

Snadno se lze přesvědčit, že jsou-li náhodné veličiny nekorelované, jsou v případě tohoto rozložení nezávislé, což obecně neplatí (srovnejte kap. 6.2.4).

Rayleigh-Riceovo (zobecnělé Rayleighovo) rozložení

Předpokládejme, že souřadnice bodu v rovině jsou dány nezávislými náhodnými veličinami X, Y , které mají normální rozložení pravděpodobnosti se stejnými rozptyly a se středními hodnotami a, b. Zajímáme se nyní o rozložení

pravděpodobnosti polárních souřadnic R a ϕ tohoto bodu.

Podle (6.75) jsme odvodili

$$f_{R,\phi}(r,\varphi) = r f_{X,Y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Jsou-li veličiny X a Y nezávislé, můžeme psát

$$f_{R,\phi}(r,\varphi) = r f_X(r \cos \varphi) \cdot f_Y(r \sin \varphi)$$

a

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\phi}(r,\varphi) d\varphi.$$

Dosaďme-li normální rozložení, dostaneme (všude $r > 0$)

$$\begin{aligned} f_R(r) &= r \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r \cos \varphi - a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r \sin \varphi - b)^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{r(a \cos \varphi + b \sin \varphi)}{\sigma^2}\right] d\varphi = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{r\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi - \psi)}{\sigma^2}\right] d\varphi, \end{aligned}$$

kde $\psi = \arctg \frac{b}{a}$.

Dále zavedeme $u = \varphi - \psi$ a $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$. Potom integrál

$$\begin{aligned} \int_{\psi}^{2\pi - \psi} \exp\left[\frac{r\alpha \cos u}{\sigma^2}\right] du &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi - \psi} \exp\left[-j\left(\frac{j\alpha r}{\sigma^2}\right) \cos u\right] du = \\ &= 2\pi J_0\left(\frac{j\alpha r}{\sigma^2}\right) = 2\pi I_0\left(\frac{\alpha r}{\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

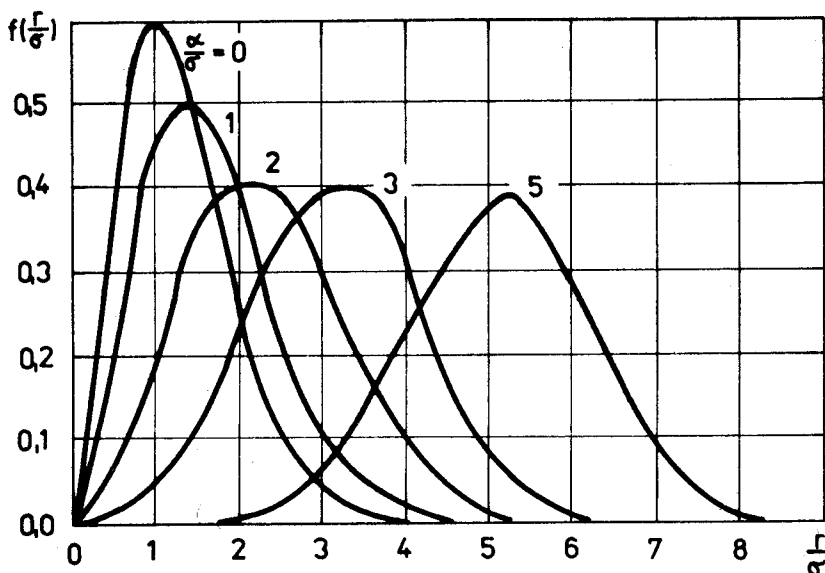
kde I_0 je Besselova funkce nultého řádu imaginárního argumentu. Potom

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + \alpha^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha r}{\sigma^2}\right), & r > 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \quad (6.93)$$

Rozložení s hustotou pravděpodobnosti (6.93) se nazývá Rayleigh-Riceovým nebo zobecněným Rayleighovým rozložením, jeho průběh je na obr. 6.18.

Distribuční funkci lze získat jen numerickou integrací; udává pravděpodobnost,

s níž se bod (X, Y) nachází uvnitř kružnice o poloměru r , opsané počátku souřadnic.



Obr. 6.18

Je-li $\alpha/\sigma \gg 1$ a není-li $|(r-\alpha)/\sigma|$ velké, blíží se rozložení rozložení normálnímu.

V případě, že střední hodnoty veličin X , Y jsou nulové, tj. $a = b = 0$, dostaneme

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & ; r > 0 \\ 0 & ; r < 0 \end{cases} \quad (6.94)$$

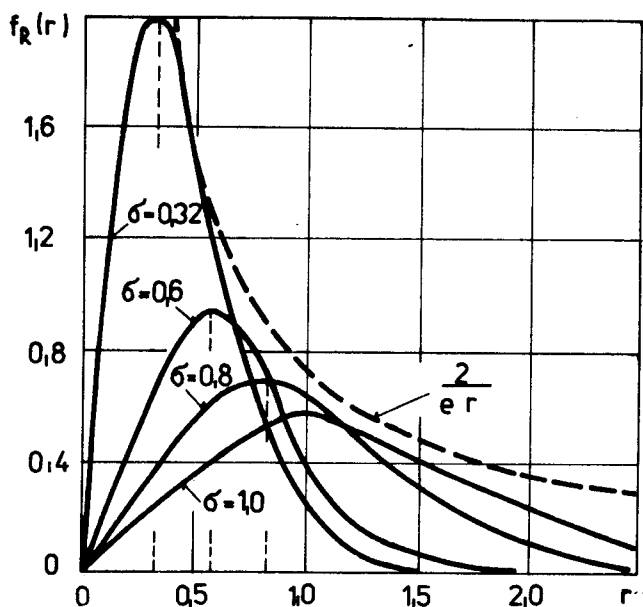
Rozložení podle (6.94) se nazývá Rayleighovo. Distribuční funkce

$$F(r) = P(R < r) = \int_0^r f_R(r) dr = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad ; r > 0 \quad (6.95)$$

udává pravděpodobnost, že náhodný bod (X, Y) je vzdálen od počátku souřadnic nanejvýše r . Průběh hustoty pravděpodobnosti Rayleighova rozložení je na obr. 6.19.

Poznamenejme ještě, že kdybychom ve výše popsané situaci hledali rozložení úhlu ϕ , dostaneme rovnoměrné rozložení

$$f_{\phi}(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , 0 \leq \psi < 2\pi \\ 0 & , \text{jinde} \end{cases}$$



Obr. 6.19

U náhodných jevů a veličin jsme se zabývali jen tím, zda určitý jev nastane, zda veličina nabude hodnoty z nějakého intervalu, ale nezajímalo nás, jak se jevy a hodnoty vyvíjejí v čase.

Zprávy (v úvodu jsme poznamenali, že je považujeme za náhodné) však zcela přirozeně spojujeme s časem - v určitých okamžicích vznikají znaky, z nichž se zprávy skládají, vznikají hodnoty signálů, které je přenášejí. Podobně rušivé šumové signály, které se objevují na výstupu přijímače budeme zcela

přirozeně chápat jako proces rozvíjející se v čase.

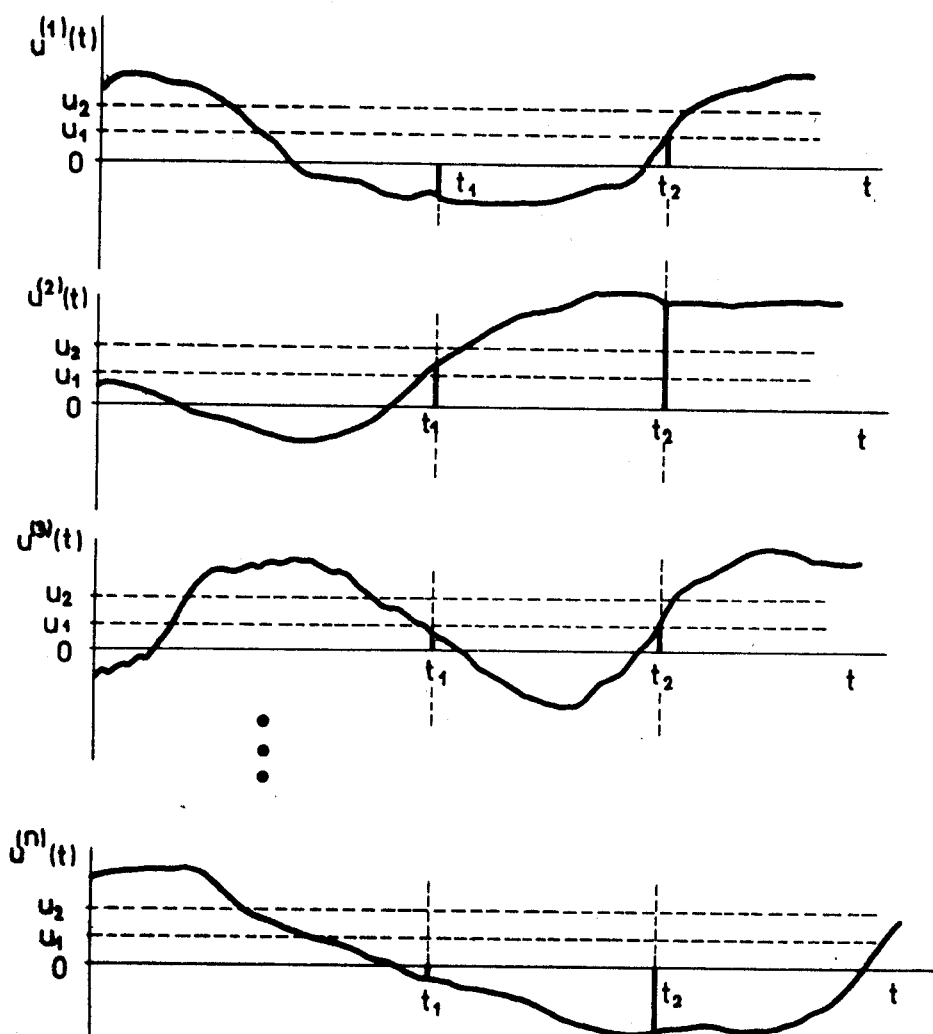
6.3.1 Náhodný proces a jeho charakteristiky

Představme si, že zaznamenáváme šumové napětí vznikající na odporu. Hodnota záznamu v každém okamžiku je náhodná - v okamžiku t_1 můžeme naměřit hodnotu $U^{(1)}(t_1)$ nebo $U^{(2)}(t_1)$, $U^{(3)}(t_1)$, ..., $U^{(n)}(t_1)$ (obr. 6.20), v okamžiku t_2 naměříme hodnotu $U^{(1)}(t_2)$ stejně tak můžeme naměřit hodnoty $U^{(2)}(t_2)$, $U^{(3)}(t_2)$, atd. V libovolném okamžiku tedy můžeme (odpovídá-li to pravděpodobnostním charakteristikám sledovaného šumu) naměřit napětí $U^{(1)}(t)$, právě tak jako napětí $U^{(2)}(t)$, $U^{(3)}(t)$. Můžeme si tedy představit, že při daném měření - v souladu s fyzikální podstatou šumu - "příroda vybrala" a realizovala jeden z možných šumových signálů.

Představu množiny - souboru - signálů, z nichž se jeden realizuje ("příroda nám ho náhodně vybere"), spojujeme s pojmem náhodná funkce nebo náhodný proces.

Funkce $X(t)$ reálného argumentu t , která je pro každé pevné t náhodnou veličinou, se nazývá náhodnou funkcí. Je-li argumentem t čas, který může nabývat libovolných hodnot z nějakého konečného nebo nekonečného intervalu, pak náhodné funkci říkáme náhodný proces; může-li argument t nabývat pouze diskrétních hodnot, pak nazýváme $X(t)$ náhodná posloupnost. Náhodné procesy i posloupnosti dále dělíme na diskrétní a spojitě v souladu s rozdělením podle kap. 1.2 (obr. 1.2).

Pozorujeme-li náhodný proces, můžeme pro každé t zjistit jeho hodnotu. Získáme tak funkci $x^{(r)}(t)$, tzv. (r -tou) realizaci náhodného procesu (hodnoty procesu $X(t)$ značíme malými písmeny, tj. $x(t)$). Realizace je jeden z možných



Obr. 6.20

průběhů náhodného procesu - ten, kterého proces v daném experimentu nabyl. Provedeme-li nezávislé pokusy ve stejných podmínkách, získáme množinu - soubor - realizací $\{x^{(r)}(t)\}$ náhodného procesu. Můžeme tedy proces také chápat jako množinu všech jeho realizací - tedy všech možných průběhů.

Náhodný proces můžeme charakterizovat parametry, které jsou v "průměru" stálé, a vycházejí ze statistických vlastností procesu. Například nás zajímá jaká je pravděpodobnost, že v čase t_1 je hodnota šumového napětí menší než hodnota U_1 (obr. 6.20). Kdybychom měli k dispozici n realizací šumového napětí a provedli jejich měření, zjistili bychom, že v n_1 případech je $U(t) < U_1$. Pro $n \rightarrow \infty$ bude relativní četnost n_1/n konvergovat (podle pravděpodobnosti) k pravděpodobnosti, že hodnota šumového napětí je v čase t_1 menší než U_1 . Této pravděpodobnosti

$$F(U_1, t_1) = P(U(t_1) < U_1)$$

(6.96)

Říkáme první distribuční funkce.

Obecně nechť je $t_1, t_2, \dots, t_n$ soubor hodnot argumentu t . Distribuční funkce soustavy náhodných veličin $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n) \quad (6.97)$$

se nazývá n -rozměrnou (n -tou, n -tého řádu) distribuční funkcí náhodného procesu.

U spojitých náhodných procesů (a posloupností) se zavádí n -rozměrná (n -tá, n -tého řádu) hustota pravděpodobnosti náhodného procesu

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (6.98)$$

Jak plyne z předchozího, můžeme pro pevné t chápat náhodný proces jako náhodnou veličinu. Potom můžeme stanovit momenty této náhodné veličiny; z nich nejvýznamnější jsou střední hodnota, rozptyl a korelační funkce, které popíšeme dále.

Nenáhodná funkce $\bar{X}(t)$, která je pro každé t rovna střední hodnotě $E[X(t)]$ náhodné veličiny $X(t)$, se nazývá střední hodnota náhodného procesu $X(t)$ a pro spojitě náhodné procesy

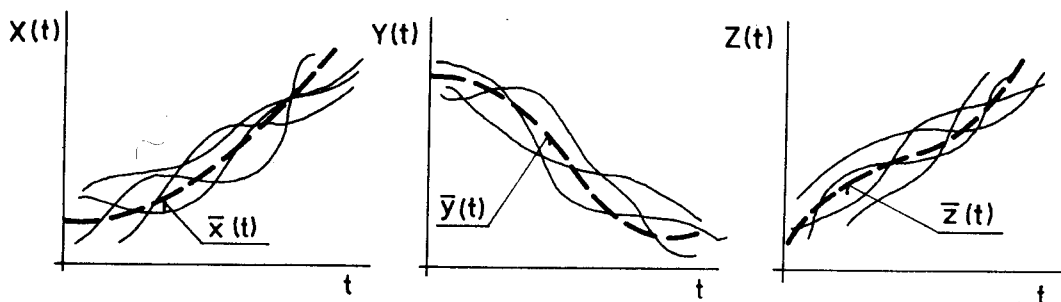
$$\bar{X}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t) dx. \quad (6.99)$$

U diskrétního náhodného procesu se integrál nahradí sumou a hustota pravděpodobnosti pravděpodobnostmi výskytu hodnot pro dané hodnoty argumentu t .

Střední hodnotu podle (6.99) budeme také nazývat střední hodnotou na mno-
žině realizací, to proto, že ji (podobně jako střední hodnotu náhodné veličiny) chápeme jako zobecnění aritmetického průměru

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n x^{(r)}(t)$$

hodnot všech realizací pro dané t .



Obr.6.21

Na obr. 6.21 jsou schematicky znázorněny možné realizace různých náhodných procesů a střední hodnoty.

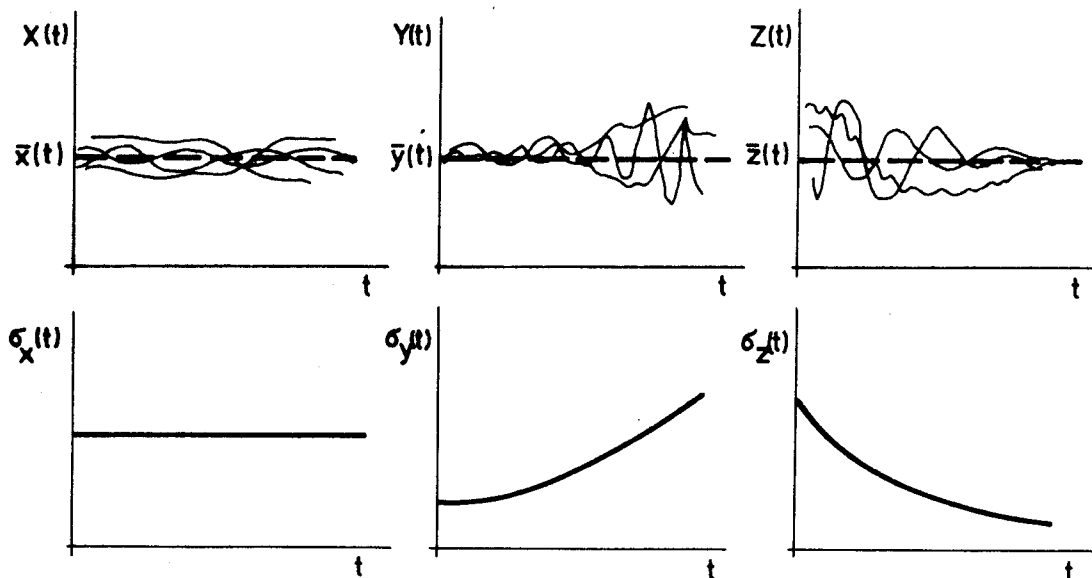
Představíme-li si náhodný proces pro pevné t jako náhodnou veličinu, můžeme, podobně jako střední hodnotu, určit i jeho rozptyl $D[X(t)]$, příp. směrodatnou odchylku $\sigma(t)$. Rozptyl je střední hodnota kvadrátu odchylky náhodného procesu od jeho střední hodnoty, tj.

$$D[X(t)] = \sigma^2(t) = E[(X(t) - \bar{x}(t))^2], \quad (6.100)$$

tedy pro spojité náhodné procesy

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}(t)]^2 f(x, t) dx. \quad (6.101)$$

Na obr. 6.22 jsou schematicky znázorněny možné realizace náhodných procesů $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ se stejnými středními hodnotami, ale různými rozptyly.



Obr. 6.22

Pro výpočet rozptylu je užitečný vztah, který získáme z (6.100) podobně jako (6.32)

$$D[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)]. \quad (6.102)$$

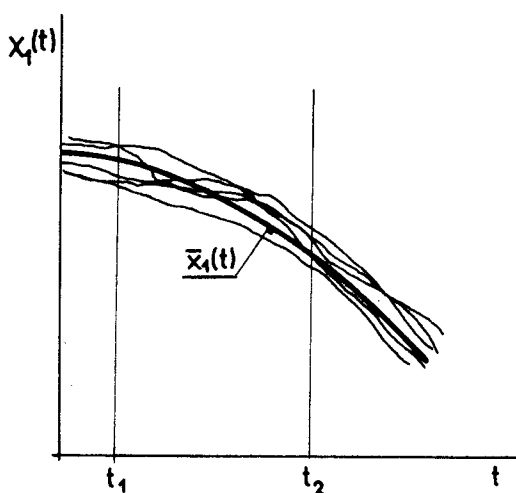
Na obr. 6.23 a 6.24 jsou některé realizace náhodných procesů $X_1(t)$ a $X_2(t)$. Oba procesy mají stejnou střední hodnotu a stejný rozptyl, i když jejich vnitřní struktura je různá. U procesu $X_1(t)$ zřejmě závisí do jisté míry hodnota procesu $X_1(t_2)$ v čase t_2 na hodnotě $X_1(t_1)$ v čase t_1 , i když obě hodnoty od sebe budou značně vzdáleny. U procesu $X_2(t)$ nezávisí příliš hodnota $X_2(t_2)$

na hodnotě $X_2(t_1)$ i při malém časovém rozdílu. Hodnoty procesu $X(t_1)$ a $X(t_2)$ můžeme opět chápat jako náhodné veličiny. Víme, že závislost dvou náhodných veličin charakterizuje kovariance nebo korelační koeficient. Podobné veličiny se zavádějí i u náhodných procesů. Střední hodnotu součinu náhodných veličin $X(t_1)$ a $X(t_2)$, které jsou hodnotami náhodného procesu v čase t_1 a t_2 ,

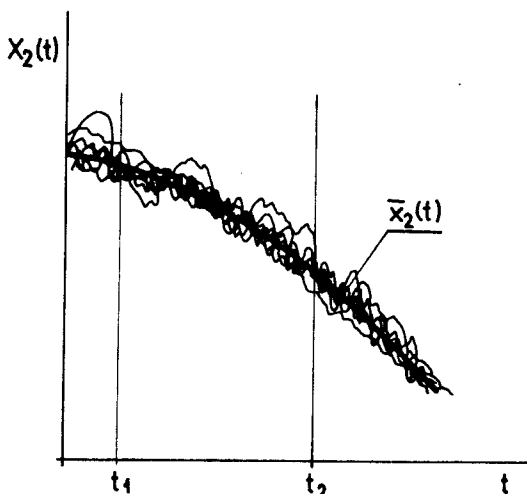
$$B(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] ,$$

(6.103)

nazýváme korelační funkcí náhodného procesu $X(t)$ (viz [21]).



Obr. 6.23



Obr. 6.24

Častěji se užívá korelační funkce fluktuací náhodného procesu

$$R(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \bar{X}(t_1))(X(t_2) - \bar{X}(t_2))] = B(t_1, t_2) - \bar{X}(t_1) \bar{X}(t_2) ,$$

(6.104)

která je v případě, že náhodný proces má nulovou střední hodnotu, rovna korelační funkci.

U spojitých náhodných procesů

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 ,$$

(6.105)

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{X}(t_1)][x_2 - \bar{X}(t_2)] f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 .$$

(6.106)

U diskrétních náhodných procesů nahradíme integrály sumami, hustoty pravděpodobností pravděpodobnostmi hodnot v daných okamžicích.

Jestliže $t_1 = t_2 = t$, nabývá korelační funkce své největší hodnoty (viz (6.103), (6.102))

$$B(t, t) = E[X^2(t)] = D[X(t)] + \bar{X}^2(t) ,$$

(6.107)

příp.

$$R(t, t) = D[X(t)] \quad (6.108)$$

a proto často zavádíme tzv. normovanou korelační funkci (fluktuací) náhodného procesu

$$r(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \quad (6.109)$$

pro kterou platí $|r(t_1, t_2)| \leq 1$.

Jsou-li hodnoty náhodného procesu v okamžicích t_1 a t_2 nezávislé, platí, podobně jako u náhodných veličin,

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2, t_2) \quad (6.110)$$

a tedy

$$B(t_1, t_2) = \bar{x}(t_1) \cdot \bar{x}(t_2), \quad (6.111)$$

$$R(t_1, t_2) = 0, \quad (6.112)$$

$$r(t_1, t_2) = 0. \quad (6.113)$$

Hodnoty náhodných procesů, pro které platí (6.111) – (6.113), nazýváme nekorelované. Podobně jako u náhodných veličin je třeba upozornit na to, že z nezávislosti plyne nekorelovanost, z nekorelovanosti nemusí plynout nezávislost. Jestliže však n -tá hustota pravděpodobnosti je normální, tj. vyhovuje vztahu (6.92) uvedenému u náhodných veličin, pak z nekorelovanosti plyne nezávislost.

Vrátíme-li se nyní k obr. 6.23 a 6.24, projeví se různá povaha procesů $X_1(t)$ a $X_2(t)$ v hodnotách korelačních funkcí. Ty budou s růstem rozdílu t_1 a t_2 klesat, u procesu $X_1(t)$ pomalu, u procesu $X_2(t)$ rychle. Korelační funkce $R(t_1, t_2)$ a $r(t_1, t_2)$ se budou blížit k nule, korelační funkce $B(t_1, t_2)$ k součinu středních hodnot $\bar{x}(t_1) \bar{x}(t_2)$.

6.3.2 Stacionární a ergodické náhodné procesy

Provádíme-li experiment, je problém, jak získat výše uvedené parametry. Ze všech realizací náhodného procesu je nám dostupná pouze realizace jediná a vzniká otázka, zda nemůžeme jako různé realizace použít části realizace jediné, tj. např. "rozstříhat" záznam šumového signálu a získat tak realizace podle obr. 6.20. Zjednodušení dosáhneme u náhodných procesů stacionárních a ergodických.

Náhodný proces je stacionární, jestliže pro hustotu pravděpodobnosti libovolného řádu a libovolné τ platí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (6.114)$$

Tzn., že proces je stacionární, je-li hustota pravděpodobnosti invariantní vzhledem k volbě počátku osy času. U stacionárního náhodného procesu nezávisí střední hodnota na čase, protože

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t + \tau) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \bar{x}.$$

Podle (6.102) a (6.76) nezávisí u stacionárního náhodného procesu na čase ani rozptyl a můžeme tedy psát

$$D[X(t)] = \sigma^2.$$

Pro korelační funkci stacionárního náhodného procesu platí vzhledem k (6.114) pro libovolné τ

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1 + \tau, t_2 + \tau) dx_1 dx_2 = B(t_1 + \tau, t_2 + \tau) \end{aligned}$$

a její hodnota tedy nezávisí na hodnotách t_1, t_2 ale jen na jejich rozdílu, který značíme $t_2 - t_1 = \tau$, tj.

$$B(t_1, t_2) = B(t_2 - t_1) = B(\tau). \quad (6.115)$$

Podobně u stacionárního náhodného procesu

$$R(t_1, t_2) = R(\tau) = B(\tau) - \bar{x}^2, \quad (6.116)$$

$$r(t_1, t_2) = r(\tau) = R(\tau) / \sigma^2. \quad (6.117)$$

Všimněme si nyní ještě korelační funkce stacionárního náhodného procesu podrobněji. Má následující vlastnosti:

1) $B(\tau) = E[X(t) \cdot X(t + \tau)],$

$$B(-\tau) = E[X(t) \cdot X(t - \tau)] = E[X(t + \tau) \cdot X(t + \tau - \tau)] = B(\tau)$$

a tedy korelační funkce stacionárního náhodného procesu je sudou funkcí

$$B(\tau) = B(-\tau). \quad (6.118)$$

2) Podle (6.103) hodnota korelační funkce v počátku je rovna (viz (6.102))

$$B(0) = E[X^2(t)] = D[x(t)] + \bar{x}^2. \quad (6.119)$$

3) Je-li náhodný proces prostý nenáhodných složek, musí se závislost mezi náhodnými proměnnými $X(t)$ a $X(t + \tau)$ zeslabovat s růstem τ , až pro $\tau \rightarrow \infty$ jsou $X(t)$ a $X(t + \tau)$ nezávislé. Protože $B(\tau) = E[X(t) \cdot X(t + \tau)]$ a střední hodnota součinu nezávislých náhodných veličin je rovna součinu jejich středních hodnot, je

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) = B(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[X(t)] \cdot E[X(t + \tau)] = \bar{x}^2. \quad (6.120)$$

4) Protože $[X(t) \pm X(t + \tau)]^2$ je vždy nezáporné, je $E[\{X(t) \pm X(t + \tau)\}^2] \geq 0$ a tedy (viz [21])

$$E[X^2(t) + X^2(t+\tau) \pm 2X(t)X(t+\tau)] \geq 0.$$

$$E[X^2(t)] + E[X^2(t+\tau)] \pm 2E[X(t) \cdot X(t+\tau)] \geq 0.$$

$$2E[X^2(t)] \pm 2B(\tau) \geq 0.$$

$$2B(0) \pm 2B(\tau) \geq 0.$$

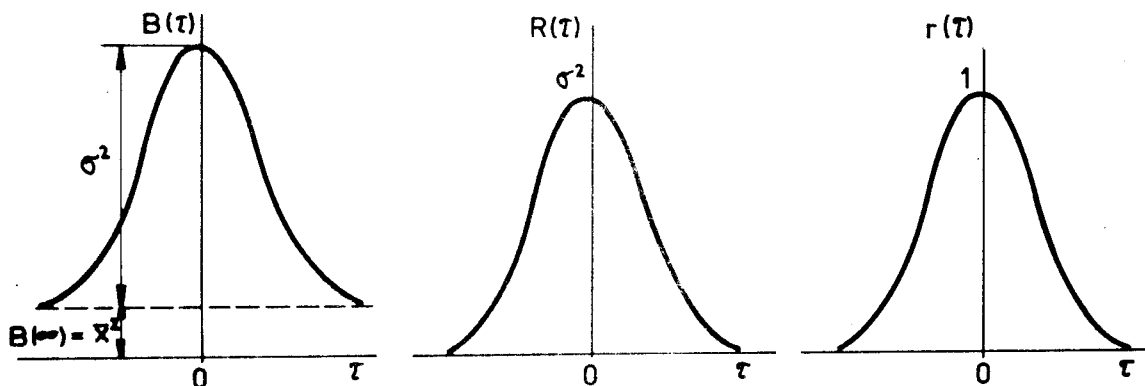
$$B(0) \geq \pm B(\tau),$$

tj.

$$B(0) \geq |B(\tau)| \quad (6.121)$$

Tzn., že korelační funkce stacionárního procesu nabývá v nule maximální hodnoty.

Podobné vlastnosti má korelační funkce fluktuací stacionárního náhodného procesu, příp. normovaná korelační funkce a jsou zachyceny na obr. 6.25.



Obr. 6.25

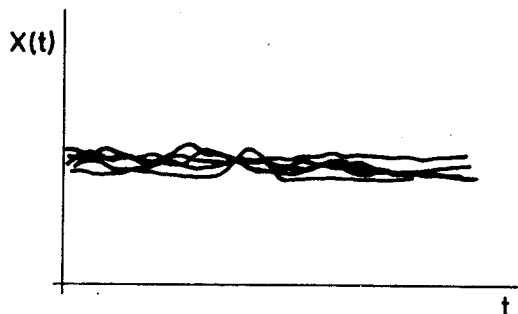
Chtěli bychom zdůraznit, že (6.121) neznamenal, že korelační funkce monotonně klesají. Mohou oscilovat kolem $\bar{X}^2$, příp. kolem nuly, ale lokální maxima nejsou nikdy větší než hodnota pro $\tau = 0$.

Lze říci, že stacionární náhodný proces probíhá v čase "homogenně", tj. charakter jeho průběhu se v čase "příliš nemění" a proces "nemá začátek ani konec", na obr. 6.26 je příklad několika realizací stacionárního náhodného procesu, na obr. 6.27 nestacionárního. U stacionárního náhodného procesu tedy nezáleží na tom, kdy určujeme jeho parametry. Nicméně dále trvá problém s jejich určením, protože ve skutečnosti nemáme k dispozici množinu všech realizací.

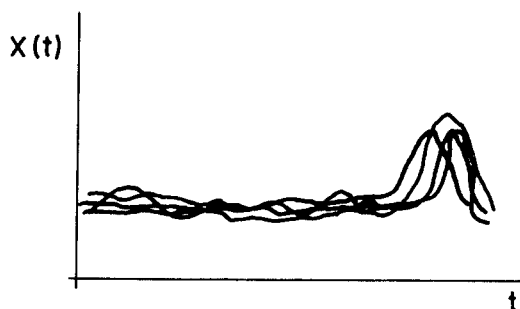
Všechny hlavní parametry náhodných procesů jsou středními hodnotami na množině realizací (viz 6.99), (6.100), (6.103), (6.109)). Máme-li k dispozici jen jedinou realizaci, umíme snadno určit její střední hodnotu v čase. Určíme-li střední hodnotu v čase z realizace za dostatečně dlouhý časový interval $T \rightarrow +\infty$ tj.

$$\tilde{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(n)}(t) dt, \quad (6.122)$$

pak u třídy procesů, kterým říkáme ergodické, je nulová pravděpodobnost, že $\tilde{X}$ se bude lišit od střední hodnoty $\bar{X}$ na množině realizací, tj. $P(|\tilde{X} - \bar{X}| > \varepsilon) = 0$



Obr. 6.26



Obr. 6.27

pro libovolné $\varepsilon > 0$ (konvergence podle pravděpodobnosti). V technické praxi se často píše rovnosti

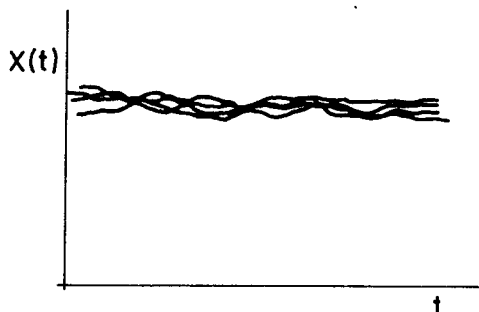
$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(r)}(t) dt, \quad (6.123)$$

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^{(r)}(t) - \bar{x}]^2 dt, \quad (6.124)$$

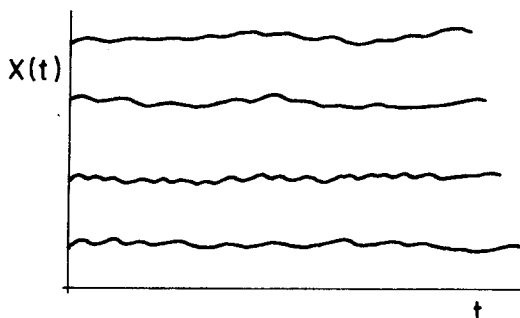
$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(r)}(t) \cdot x^{(r)}(t + \tau) dt, \quad (6.125)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^{(r)}(t) - \bar{x}] [x^{(r)}(t + \tau) - \bar{x}] dt, \quad (6.126)$$

kterými se dříve uvedené parametry nahrazují. Je však třeba vždy pamatovat na to, že to je možné jen u ergodických náhodných procesů a že znaménko rovnosti znamená konvergenci podle pravděpodobnosti. Funkci (6.125) nazýváme v souladu s (1.31) autokorelační. Na obr. 6.28 je příklad několika realizací stacionárního ergodického procesu, na obr. 6.29 je příklad několika realizací stacionárního procesu, který není ergodický.



Obr. 6.28



Obr. 6.29

Zavedením ergodických náhodných procesů lze dát některým parametrům fyzikální význam. Střední hodnota

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(r)}(t) dt$$

odpovídá stejnosměrné složce procesu. Korelační funkce pro $\tau = 0$ (rovná střední kvadratické hodnotě)

$$B(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^{(r)}(t)]^2 dt$$

odpovídá střednímu výkonu. Protože

$$B(0) = \sigma^2 + B(\infty) = \sigma^2 + \bar{x}^2$$

lze $B(0)$ interpretovat jako celkový výkon procesu daný výkonem stejnosměrné složky $\bar{x}^2$ a výkonem σ^2 proměnných ("střídavých") složek. Pro nulovou střední hodnotu rozptýl náhodného procesu σ^2 představuje výkon proměnných složek náhodného procesu a směrodatná odchylka odpovídá efektivní hodnotě procesu. Proto se často odstup signálu od šumu vyjadřuje poměrem efektivní hodnoty signálu ke směrodatné odchylce šumu.

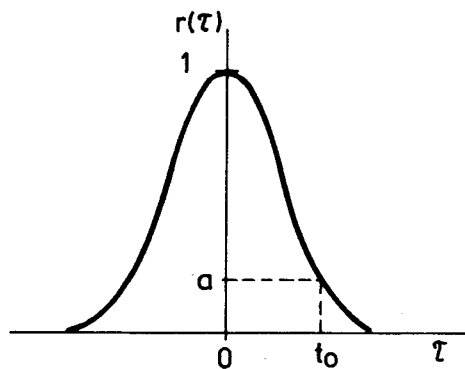
6.3.3 Doba korelace

Pro stacionární náhodný proces $X(t)$ neobsahující determinované složky lze nalézt takové τ_0 , že pro $\tau > \tau_0$ jsou náhodné veličiny $X(t)$ a $X(t+\tau)$ prakticky nezávislé. Praktickou nezávislost chápeme v tom smyslu, že pro $\tau > \tau_0$ je absolutní hodnota normované korelační funkce fluktuací náhodného procesu menší než dané číslo a . Hodnotu τ_0 nazýváme dobou korelace a získáme ji řešením rovnice (viz obr. 6.30)

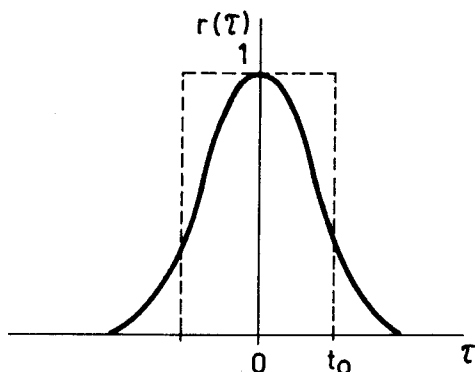
$$|r(\tau_0)| < a \quad r(0) = a \quad (6.127)$$

kde a je dané; $a < 1$. Takto definovaná korelace závisí na zvolené hodnotě a . Často se používá jiné definice doby korelace (viz obr. 6.31)

$$t_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) d\tau = \frac{1}{R(0)} \int_0^{+\infty} R(\tau) d\tau, \quad (6.128)$$



Obr. 6.30



Obr. 6.31

tj. doba korelace odpovídá šířce obdélníka, jehož výška je $r(0)$ a plocha je rovna ploše pod křivkou $r(\tau)$.

6.3.4 Dvojice náhodných procesů

Podobně jako jsme zavedli soustavy náhodných veličin, lze zavést i soustavy náhodných procesů. V našem textu se spokojíme s výkladem základních vlastností dvojic náhodných procesů, přičemž budeme předpokládat spojité procesy. Přechod na diskrétní náhodné procesy je snadný.

U dvou náhodných procesů $X(t), Y(t)$ můžeme zavést simultánní distribuční funkci

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m; t_1, t_2, \dots, t_n, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) &= \\ &= P(X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n, Y(t'_1) < y_1, \dots, Y(t'_m) < y_m) \end{aligned} \quad (6.129)$$

a simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) &= \\ &= \frac{\partial^{n+m} F_{X,Y}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_n \partial y_1 \dots \partial y_m} \end{aligned} \quad (6.130)$$

Jsou-li náhodné procesy $X(t)$ a $Y(t)$ vzájemně nezávislé, je simultánní hustota pravděpodobností rovna součinu individuálních hustot pravděpodobností, tj.

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) &= \\ &= f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \cdot f_Y(y_1, \dots, y_m; t'_1, \dots, t'_m). \end{aligned} \quad (6.131)$$

Definují se smíšené momenty náhodných procesů, z nichž nejjednodušší je vzájemná korelační funkce

$$B_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y; t_1, t_2) dx dy, \quad (6.132)$$

příp.

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \bar{x}(t_1))(Y(t_2) - \bar{y}(t_2))]. \quad (6.133)$$

Je zřejmé, že jsou-li oba náhodné procesy vzájemně nezávislé, potom

$$B_{X,Y}(t_1, t_2) = \bar{x}(t_1) \cdot \bar{y}(t_2), \quad (6.134)$$

případně

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = 0. \quad (6.135)$$

Dva náhodné procesy nazýváme vzájemně stacionární, nezávisí-li jejich simultánní hustota pravděpodobnosti libovolného řádu na volbě počátku osy času. Pro takové procesy zřejmě

$$E[X(t) \cdot Y(t + \tau)] = E[Y(t) \cdot X(t - \tau)] = B_{X,Y}(\tau) = B_{Y,X}(-\tau). \quad (6.136)$$

Jsou-li ještě nezávislé, pak

$$B_{X,Y}(\tau) = \bar{x} \bar{y} . \quad (6.137)$$

Dva náhodné procesy nazýváme simultánně ergodické, jestliže číselné charakteristiky získané na souboru dvojic realizací můžeme s pravděpodobností blízkou jedné nahradit střední hodnotou v čase jedné dvojice realizací, tj.

$$P\left[|B_{X,Y}(\tau) - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(r)}(t) y^{(p)}(t+\tau) dt| > \varepsilon\right] = 0$$

Uvedené vlastnosti dvojice náhodných procesů použijeme při rozboru korelačních metod příjmu signálů.

6.3.5 Korelační příjem periodických signálů

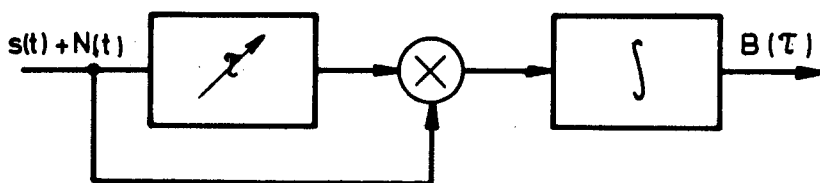
Jednou z častých úloh v radiotechnice je rozhodnout, zda v přijímané směsi šumu a užitečného signálu je periodický signál a zjistit jeho periodu. Tento problém se řeší tzv. korelačním příjmem.

Předpokládáme, že máme směs šumu $N(t)$ a periodického signálu $s(t)$ tj. náhodný proces

$$F(t) = N(t) + s(t).$$

Provedeme-li s tímto signálem operaci autokorelace (6.125) viz obr. 6.32, můžeme psát

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) F(t+\tau) dt = B_{SN}(\tau) + B_{NS}(\tau) + B_N(\tau) + B_S(\tau), \quad (6.138)$$



Obr. 6.32

kde

$$B_{SN}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t) N(t+\tau) dt, \quad (6.139)$$

$$B_{NS}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T N(t) s(t+\tau) dt, \quad (6.140)$$

$$B_S(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t) s(t+\tau) dt, \quad (6.141)$$

$$B_N(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T N(t) N(t+\tau) dt. \quad (6.142)$$

Nyní předpokládejme, že signál a šum jsou simultánně ergodické, nezávislé a že střední hodnota šumu je nulová. (Šum je stacionární.) Potom můžeme střední hodnoty v čase (6.139) a (6.140) nahradit středními hodnotami na souboru realizací a vzhledem k nezávislosti podle (6.137) psát

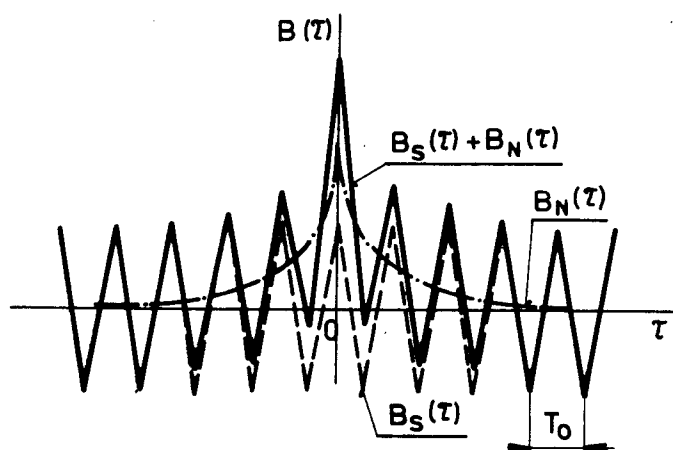
$$B_{SN}(\tau) = \overline{s(t)} \cdot \overline{n} = \overline{s(t)} \cdot 0 = 0$$

a podobně

$$B_{NS}(\tau) = 0.$$

Autokorelační funkci šumu (6.142) můžeme nahradit korelační funkcí, o níž víme, že klesá ke kvadrátu střední hodnoty, která je zde nulová.

O autokorelační funkci periodického signálu víme, že je periodická (viz kap. 2.4) s periodou rovnou periodě T_0 signálu. Celková situace je na obr. 6.33.



Obr. 6.33

Provedeme-li tedy se signálem operaci autokorelace a objeví-li se po odeznění korelační funkce šumu periodická složka, je v signálu obsažen determinovaný periodický signál. Jeho periodu určíme z periody periodické složky autokorelační funkce.

Tato metoda umožňuje rozhodnout o přítomnosti signálu skrytého hluboko pod šumem. Znalost periody umožňuje zjednodušit vyfiltrování průběhu signálu.

6.3.6 Spektrální výkonová hustota

Determinované signály jsme vyjadřovali buď v oblasti času nebo v oblasti kmitočtů. Spektrální vyjádření v oblasti kmitočtů je výhodné zejména při filtraci, kdy potlačujeme určité kmitočtové složky signálu. Proto se snažíme vyjádřit i náhodné signály v oblasti kmitočtů.

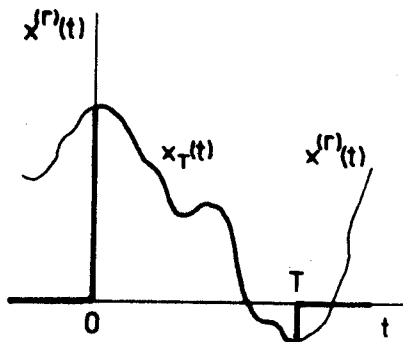
Bezprostřední použití aparátu Fourierových řad, příp. Fourierovy transformace pro náhodné procesy není možné. To proto, že

- 1) Realizace náhodného procesu není periodická, tudíž nelze užít Fourierovy řady.
- 2) Fourierův integrál z realizace nekonečné délky nekonverguje.
- 3) Samotný pojem spektra není vhodný; spektrum nese informaci o zcela determinovaných vztazích mezi amplitudami a fázemi kmitů na různých kmitočtech. U náhodných procesů nemohou být tyto vztahy determinované.

Přesto se aparátu Fourierovy transformace používá i u stacionárních náhodných procesů. Zavádí se spektrální výkonová hustota $S(\omega)$. Pak $S(\omega) d\omega$ před-

stavuje výkon v průměru za velmi dlouhou dobu v kmitočtovém pásmu šířky $d\omega$.

V kap. 2 a v kap. 3 jsme ukázali, že Fourierova transformace autokorelační funkce u periodických, příp. neperiodických signálů je výkonové, příp. energetické spektrum signálu. Pokusme se nyní zjistit, čemu odpovídá Fourierova transformace autokorelační funkce náhodného procesu. Z realizace náhodného procesu $x^{(r)}(t)$ vyjmeme úsek na intervalu $[0, T]$, který označíme $x_T(t)$ (viz obr. 6.34)



Obr. 6.34

$$x_T(t) = \begin{cases} x^{(r)}(t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad (6.143)$$

a vypočítáme jeho autokorelační funkci $R_T(\tau)$ (budeme dále předpokládat, že střední hodnota je nulová a můžeme tedy položit $B(\tau) = R(\tau)$)

$$R_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) x_T(t+\tau) dt. \quad (6.144)$$

Její Fourierova transformace se dá vzhledem k nulové hodnotě mimo $[0, T]$ zapsat

$$\begin{aligned} F[R_T(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) e^{-j\omega\tau} \\ &\cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{T} X_T(\omega) \cdot X_T^*(\omega) = \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (6.145)$$

kde $X_T(\omega)$ je Fourierova transformace úseku $x_T(t)$. Pro $T \rightarrow +\infty$ můžeme psát, že Fourierova transformace autokorelační funkce

$$F[R(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} F[R_T(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 = S(\omega). \quad (6.146)$$

Hledejme nyní fyzikální význam $S(\omega)$. Energie úseku $x_T(t)$ je

$$\begin{aligned} \int_0^T x_T^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Z energie můžeme určit střední výkon

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (6.147)$$

Ze vztahu 6.147 vidíme, že $S(\omega) d\omega$ představuje průměrný výkon za velmi dlouhý čas, který nese signál v pásmu kmitočtů šířky $d\omega$. Veličině $S(\omega)$ říkáme spektrální výkonová hustota a vztahy, které ji definují se nazývají Wiener-Chinčino-va věta:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F[R(\tau)] , \quad (6.148)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = F^{-1}[S(\omega)] . \quad (6.149)$$

Protože korelační funkce stacionárního náhodného procesu je sudou funkcí, je sudou funkcí i spektrální výkonová hustota a lze psát

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau , \quad (6.150)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega . \quad (6.151)$$

Pomocí spektrální výkonové hustoty můžeme vyjádřit také rozptyl. Podle (6.119) a (6.116) dostaneme

$$\sigma^2 = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega . \quad (6.152)$$

V uvedených vztazích je spektrální výkonová hustota $S(\omega)$ definována jak na kladných, tak na záporných hodnotách úhlového kmitočtu ω , přičemž

$$S(\omega) = S(-\omega) .$$

Zavedeme-li místo tohoto (tzv. "dvoustranného") spektra jednostrannou "fyzikální" spektrální výkonovou hustotu

$$S(f) = S(\omega) + S(-\omega) = 2S(\omega) ; \quad \omega = 2\pi f ,$$

nenulovou jen pro $f \geq 0$, má Wiener-Chinčinova věta tvar

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau , \quad (6.153)$$

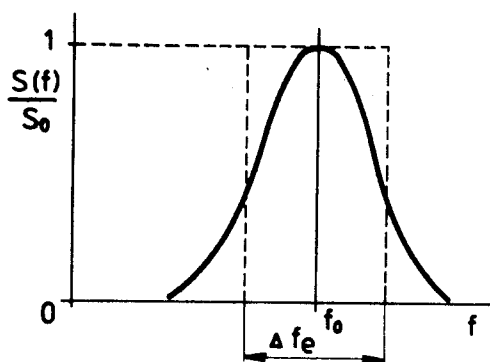
$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau df . \quad (6.154)$$

Často se zavádí tzv. energetická šířka spektra Δf_e

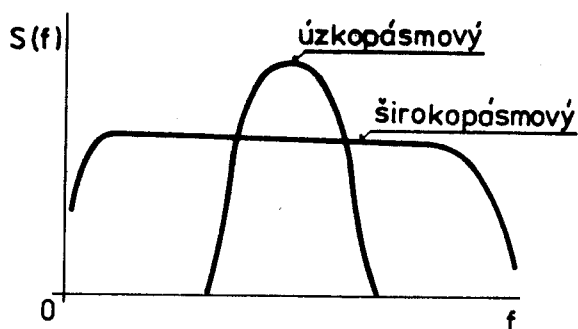
$$\Delta f_e = \frac{1}{S_0} \int_0^{\infty} S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{S_0} \int_0^{\infty} S(f) df , \quad (6.155)$$

kde $S_0 = S(f_0)$ je hodnota spektrální výkonové hustoty na určitém charakteristickém kmitočtu, obvykle maximální hodnota (viz obr. 6.35).

Podle závislosti spektrální výkonové hustoty na kmitočtu (resp. podle energetické šířky spektra) se často náhodné procesy rozdělují na širokopásmové a úzkopásmové (viz obr. 6.36).



Obr. 6.35



Obr. 6.36

Idealizací širokopásmových náhodných procesů je tzv. bílý šum. Má konstantní spektrální výkonovou hustotu (viz obr. 6.37). Jeho korelační funkce je

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega$$

a protože je (viz odst. 3.2.1)

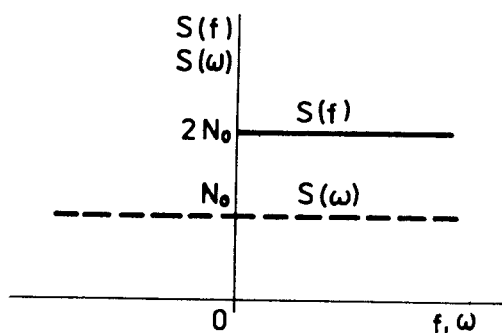
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau)$$

čestaneme

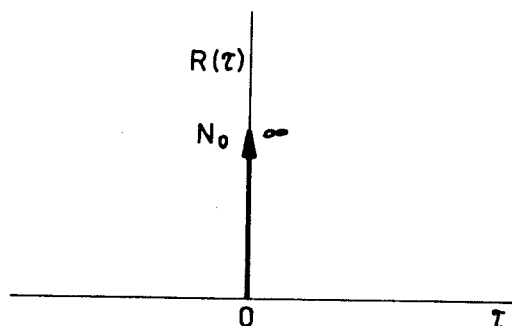
$$R(\tau) = N_0 \delta(\tau).$$

(6.156)

Te znamená, že u bílého šumu jsou hodnoty ve dvou různých libovolně blízkých okamžicích nekorelované (obr. 6.38). Bílý šum se proto často označuje jako absolutně náhodný proces. Fyzikálně ho nelze realizovat (srovnejte (6.152) a (6.147)).



Obr. 6.37



Obr. 6.38

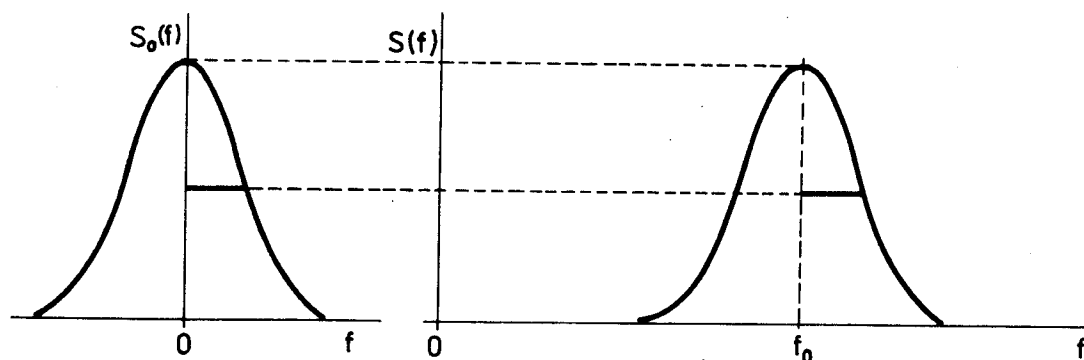
Protože spektrální výkonová hustota neurčuje jednoznačně rozložení hustoty pravděpodobnosti, mohou existovat různé náhodné procesy s konstantními spektrálními výkonovými hustotami a s různými hustotami pravděpodobnosti.

V radiotechnických aplikacích se často vyskytují náhodné procesy lišící se tím, že spektrální výkonová hustota $S_0(f)$ jednoho procesu je soustředěna kolem kmitočtu $f = 0$, spektrální výkonová hustota $S(f)$ druhého procesu je soustředěna v úzkém pásmu kolem kmitočtu $f_0 \gg 0$. Tvar spektrálních výkonových hustot je stejný, tj.

$$S(f) = S_0(|f - f_0|)$$

(viz obr. 6.39). Je-li $R_0(\tau)$ korelační funkce fluktuací náhodného procesu se spektrální výkonovou hustotou ("fyzikální") $S_0(f)$ a $R(\tau)$ korelační funkce fluktuací náhodného procesu se spektrální výkonovou hustotou $S(f)$, platí

$$R(\tau) = 2 R_0(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (6.157)$$



Obr. 6.39

7. PŘENOS SIGNÁLŮ SOUSTAVAMI

Přivedeme-li na vstup soustavy signál $x(t)$ - buzení, objeví se na výstupu soustavy odezva $y(t)$. Soustava transformuje funkci času $x(t)$ na vstupu na funkci $y(t)$ na výstupu podle vztahu

$$y(t) = A \{ x(t) \}. \quad (7.1)$$

Pravidlo A , podle kterého se transformace provádí, se nazývá operátorem soustavy.

Soustavy dělíme podle povahy operátoru soustavy na lineární a nelineární.

7.1 LINEÁRNÍ SOUSTAVY

Lineární soustavy se vyznačují tím, že jejich operátor je lineární, tj. platí

$$A \{ c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \} = c_1 A \{ x_1(t) \} + c_2 A \{ x_2(t) \}. \quad (7.2)$$

Vztah (7.2) se často nazývá princip superpozice. Odezva na součet budících signálů je rovna součtu odezev na samostatné budící signály.

7.1.1 Charakteristiky lineárních soustav

Podle (1.14) můžeme signál $x(t)$ zapsat s využitím vzorkovací vlastnosti Diracova impulsu

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau.$$

Pravou stranu výrazu můžeme zapsat [3] jako limitu součtu, tj.

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} [x(\tau) \cdot \Delta\tau] \delta(t-\tau). \quad (7.3)$$

Známe-li odezvu $h(t)$ soustavy na Diracův impuls, bude u lineární soustavy odezva na impuls $\delta(t-\tau)$ s váhou $x(t) \Delta\tau$ rovna $x(\tau) \Delta\tau h(t-\tau)$. Odezva na celý signál $x(t)$ bude

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} [x(\tau) \Delta\tau] h(t-\tau),$$

a vrátíme-li se k integrálu, dostaneme odezvu na signál $x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t). \quad (7.4)$$

Na vztah (7.4) můžeme uplatnit Fourierovu transformaci (3.18) a pro spektrum výstupního signálu dostaneme

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega), \quad (7.5)$$

kde $X(\omega)$ je spektrum vstupního signálu a $H(\omega)$ je přenosová funkce soustavy.

Přenosová funkce soustavy je s impulsovou odezvou $h(t)$, tj. s odezvou soustavy na Diracův impuls, vázána Fourierovou transformací, tj.

$$H(\omega) = F[h(t)]. \quad (7.6)$$

Přenosová funkce soustavy je komplexní veličina

$$H(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\alpha(\omega)}, \quad (7.7)$$

kde $A(\omega) = |H(\omega)|$ je tzv. amplitudová charakteristika soustavy,

$\alpha(\omega) = \arg H(\omega)$ je fázová charakteristika soustavy,

$$|H(\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (7.8)$$

$$\alpha(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (7.9)$$

Čtenář si snadno dokáže, že je-li vstupní signál $e^{j\omega_0 t}$, bude výstupní signál (rozumí se v ustáleném stavu - jak plyne z mezí integrálu v (7.4))

$$y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} = A(\omega_0) e^{j[\omega_0 t + \alpha(\omega_0)]}$$

(do (7.5) dosadíme (3.32)). Tzn., že odezvou lineární soustavy na

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

je opět kosinusový signál, jehož amplituda a fázový posun jsou dány vlastnostmi přenosové funkce, tj.

$$y(t) = A(\omega_0) \cos[\omega_0 t + \alpha(\omega_0)].$$

Ze vztahu (7.5) je zřejmý význam přenosové funkce. Soustava může působit jako filtr, který ovlivňuje spektrum výstupního signálu - některé kmitočtové složky propouští, některé potlačuje.

Poznamenejme ještě, že k zavedení charakteristik lineární soustavy je možné využít její diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

Pro přenosovou funkci pak platí [27]

$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}. \quad (7.10)$$

Jestliže soustava přenáší kausální signály $x(t) = 0, t < 0$, musí být dolní mez v (7.4) nulová. Pro fyzikálně realizovatelné soustavy musí být i $h(t) = 0$ pro $t < 0$, tzn., že $h(t-\tau) = 0$ pro $\tau > t$. Potom musí být horní mez v (7.4) rovna t a odezva soustavy na buzení je

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (7.11)$$

Vztah (7.4) platí obecně, zatímco (7.11) platí pro $x(t) = 0$ a $h(t) = 0$ pro $t < 0$.

7.1.2 Podmínky nezkresleného přenosu

Za nezkreslenou odezvu $y(t)$ buzení $x(t)$ budeme považovat signál, který má stejný tvar jako $x(t)$. Může být zpožděn v čase. Tzn., že nezkreslený je signál

$$y(t) = k x(t - t_0). \quad (7.12)$$

Tomu odpovídá obraz (viz (3.12))

$$Y(\omega) = k X(\omega) e^{-j\omega t_0} = H(\omega) \cdot X(\omega). \quad (7.13)$$

Nezkreslující lineární soustava tedy musí mít přenosovou funkci

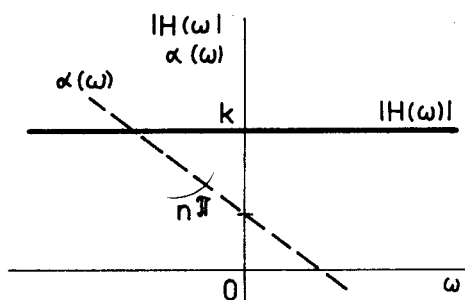
$$H(\omega) = k \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (7.14)$$

viz obr. 7.1. Amplitudová charakteristika musí být konstantní pro všechny kmitočty a fázová charakteristika musí být úměrná kmitočtu

$$\alpha(\omega) = -\omega t_0. \quad (7.15)$$

Fyzikální interpretace (7.15) je zřejmá: jestliže se dvě kmitočtové složky mají posunout o stejný časový interval, musí se změnit fáze úměrně kmitočtu. Protože změna fáze o $n\pi$ vede jenom ke změně znaménka, píšeme pro ideální fázovou charakteristiku

$$\alpha(\omega) = n\pi - \omega t_0, \quad n - \text{celé}. \quad (7.16)$$



Obr. 7.1

Stupeň nezávislosti $|H(\omega)|$ na kmitočtu se charakterizuje šířkou pásma. Šířkou pásma (propustností) lineárního systému rozumíme interval kmitočtů, v němž $|H(\omega)|$ neklesne pod $1/\sqrt{2}$ své hodnoty na středním kmitočtu. Ideální lineární soustava by měla mít nekonečnou šířku pásma - taková soustava však není technicky realizovatelná. Nezkreslený přenos zajišťují soustavy s velkou avšak konečnou šířkou pásma. V kapitole 3 jsme viděli, že u reálných signálů

ubývá energie měřená na vysokých kmitočtech a proto ztráta těchto složek nezpůsobuje velké zkreslení. Podrobnější analýzou zkreslení amplitudové a fázové charakteristiky se zabývá literatura [24], [2].

7.1.3 Ideální filtry

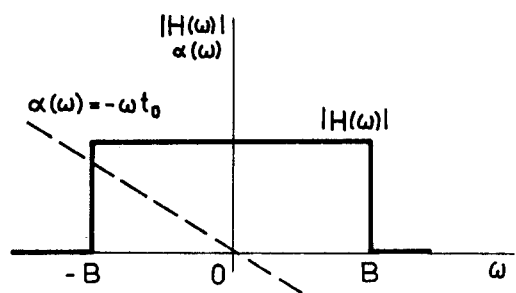
V našich dalších úvahách budeme skutečné charakteristiky soustav aproximovat idealizovanými jednoduchými charakteristikami a skutečné obvody nahrazovat ideálními.

Ideální dolní propust nezkrasluje signály, jejichž spektrum je na úhlových kmitočtech menších než B [s^{-1}]. Signály na kmitočtech vyšších než B se zcela potlačí (obr. 7.2). Impulsová odezva ideální dolní propusti je (viz (1.7), obr. 3.7, (3.12), (2.43))

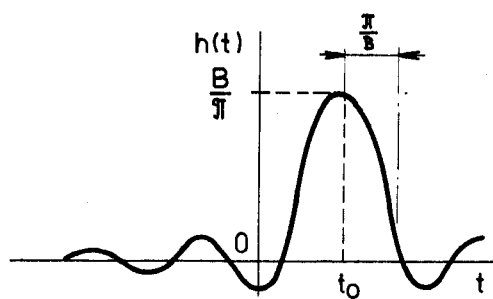
$$\begin{aligned} h(t) &= F^{-1}[H(\omega)] = F^{-1}\left[\text{rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right) \cdot e^{-j\omega t_0}\right] = \\ &= \frac{B}{\pi} \text{Sa}[B(t-t_0)]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Z výrazu (7.17) je zřejmé, že impulsová odezva (obr. 7.3) existuje i při záporných t , ačkoli buzení je připojeno až v okamžiku $t = 0$. Praktická realizace takovéto soustavy s predikcí není možná a ideální dolní propust není fyzikálně realizovatelná.

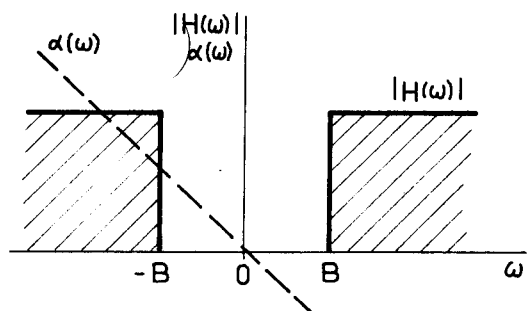
Podobně není fyzikálně realizovatelná ideální horní propust (obr. 7.4) a ideální pásmová propust (obr. 7.5).



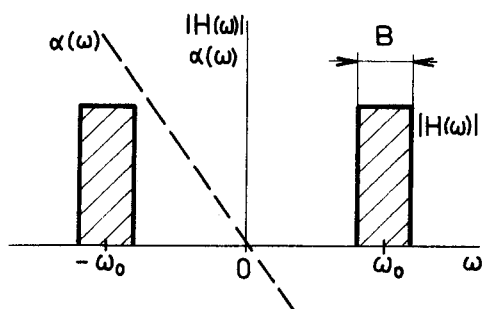
Obr. 7.2



Obr. 7.3

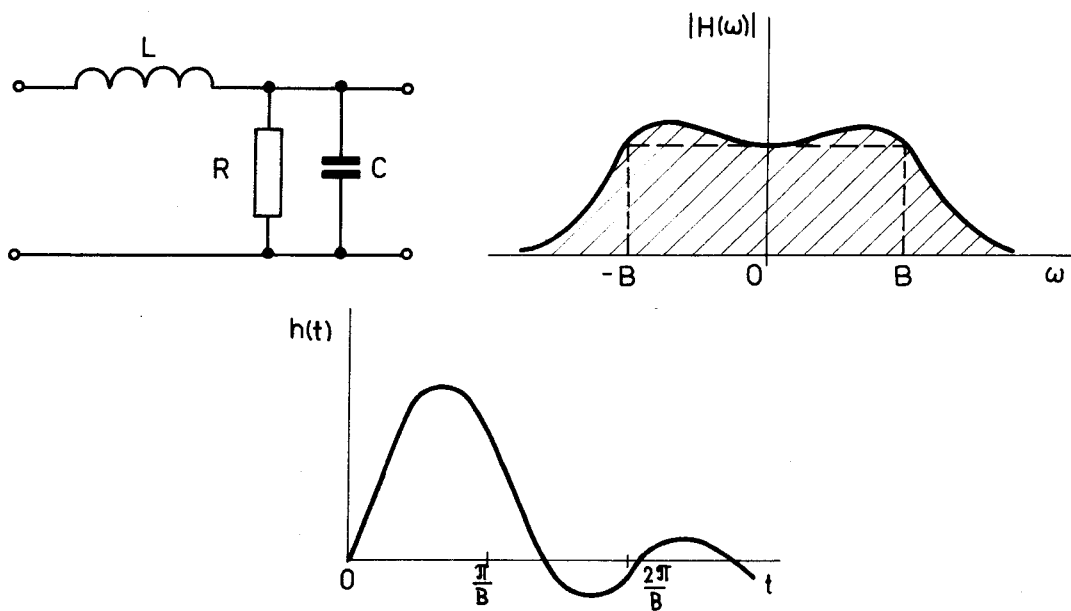


Obr. 7.4



Obr. 7.5

Jako příklad realizovatelné dolní propusti uveďme schema na obr. 7.6.



Obr. 7.6

Na obrázku je naznačen i průběh přenosové funkce a impulsové odezvy pro $1/\sqrt{LC} = B$, $\sqrt{L/C} = R$ [3]. Je zřejmé, že impulsová odezva je podobná odezvě ideální dolní propusti až na to, že začíná v čase $t = 0$.

7.1.4 Fyzikální realizovatelnost

Podle předchozího odstavce je žádoucí stanovit podmínky fyzikální realizovatelnosti lineární soustavy. Uvedeme zde výsledky práce [3].

Kriterium fyzikální realizovatelnosti lze zformulovat v oblasti časové a v oblasti kmitočtové. V časové oblasti musí být odezva soustavy na Diracův impuls nulová pro $t < 0$. V kmitočtové oblasti platí: pro fyzikální realizovatelnost je nutnou a postačující podmínkou, aby

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln H(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (7.18)$$

Vztah (7.18) je Wiener-Paleyovo kriterium. Jestliže amplitudová charakteristika soustavy nesplňuje (7.18), nemá soustava kauzální odezvu, tj. odezva existuje před buzením.

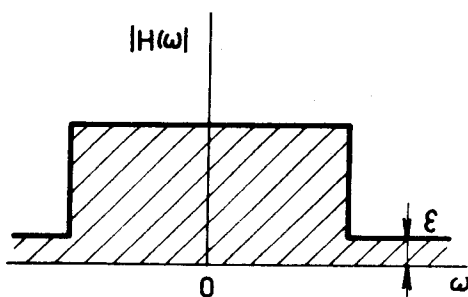
Ze (7.18) vyplývá, že amplitudová charakteristika $|H(\omega)|$ může být rovna nule na diskrétních kmitočtech, ale nemůže být nulová na konečných intervalech kmitočtů, protože integrál (7.18) by divergoval. Dále amplitudová charakteristika nemůže klesat rychleji než exponenciála. Proto soustava s

$$|H(\omega)| = k e^{-a|\omega|}$$

je realizovatelná, zatímco soustava s

$$|H(\omega)| = k e^{-a\omega^2}$$

není realizovatelná.



Obr. 7.7

Je nutno poznamenat, že i když ideální charakteristiky podle obr. 7.2, 7.4 a 7.5 nejsou realizovatelné, lze se jim prakticky libovolně přiblížit, protože podle (7.17) lze realizovat soustavu s amplitudovou charakteristikou podle obr. 7.7 pro libovolně malé ϵ .

7.2 NELINEÁRNÍ SOUSTAVY

U nelineární soustavy závisí, podobně jako u lineární, odezva na buzení podle vztahu

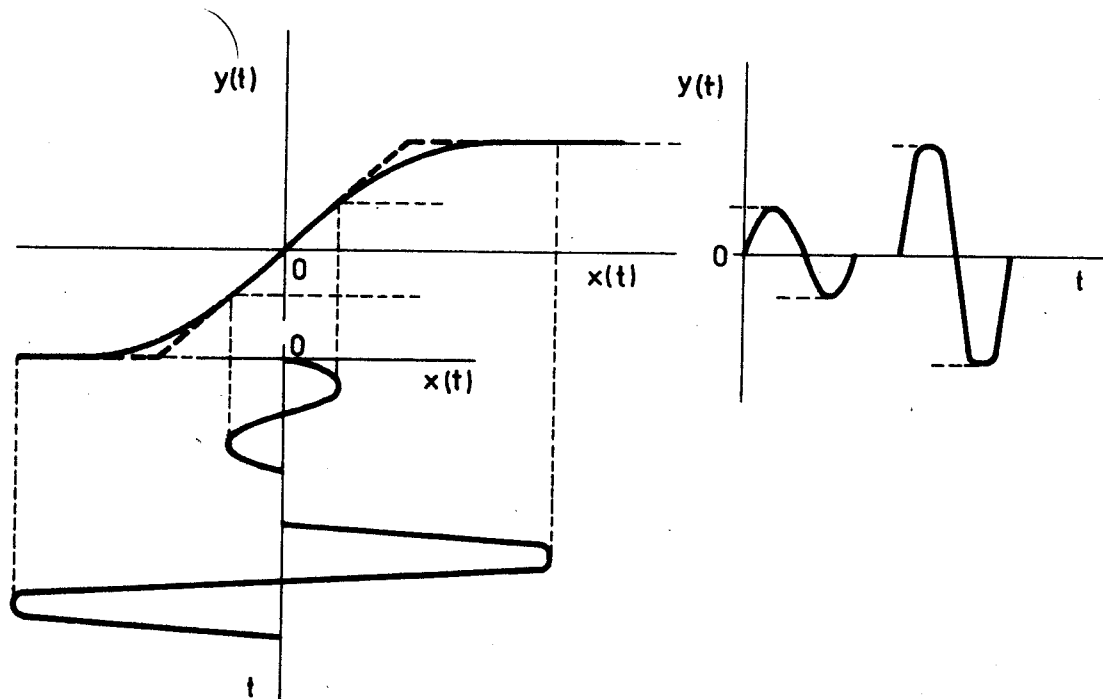
$$y(t) = A \{ x(t) \}.$$

Operátor soustavy A je však nelineární. V nelineární soustavě neplatí princip superpozice.

V praxi získáváme operátor soustavy nejčastěji měřením. Závislost mezi odezvou a buzením vyjadřujeme často mocninnou řadou

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots \quad (7.19)$$

Jednou z nejčastěji se vyskytujících soustav je soustava, kterou lze aproximovat mocninnou řadou (7.19) třetího řádu s $a_2 = 0$. Vyznačuje se tím, že pro malé vstupní (budicí) signály se chová jako lineární soustava, pro velké buzení je odezva zkreslená v důsledku nelinearity (obr. 7.8).



Obr. 7.8

Všimněme si nyní odezvy nelineární soustavy na harmonický budicí signál

$$x(t) = A \cos \omega t.$$

Ze (7.19) dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 + a_1 A \cos \omega t + a_2 A^2 \cos^2 \omega t + a_3 A^3 \cos^3 \omega t + \dots = \\ &= a_0 + a_1 A \cos \omega t + a_2 A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \omega t \right) + a_3 A^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3 \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \cos \omega t \right) + \dots = \end{aligned}$$

$$= a_0 + \frac{a_2 A^2}{2} + \dots +$$

$$+ (a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 + \dots) \cos \omega t + (\frac{a_2 A^2}{2} + \dots) \cos 2 \omega t +$$

$$+ (\frac{a_3 A^3}{4} + \dots) \cos 3 \omega t + \dots = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2 \omega t + A_3 \cos 3 \omega t + \dots$$

Na výstupu dostáváme periodický signál, který má periodu stejnou jako má budicí signál - není však harmonický - je zkreslený vyššími harmonickými. Vznik vyšších harmonických se charakterizuje činitelem

$$k_n = \frac{|A_n|}{|A_1|}$$

změna tvaru signálu činitelem zkreslení

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{|A_1|}$$

příp.

$$k' = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}}$$

Pro obecné buzení $x(t)$ je spektrum odezvy (7.19)

$$Y(\omega) = F[y(t)] = 2\pi a_0 \delta(\omega) + a_1 X(\omega) + a_2 X(\omega) * X(\omega) + \\ + a_3 X(\omega) * X(\omega) * X(\omega) + \dots$$

Jestliže je spektrum $X(\omega)$ soustředěno do pásma šířky B , tj.

$$X(\omega) = \begin{cases} X(\omega) \neq 0 & , \quad |\omega| < B, \\ 0 & , \quad |\omega| > B, \end{cases}$$

je $X(\omega) * X(\omega)$ nenulové v pásmu šířky $2B$, $X(\omega) * X(\omega) * X(\omega)$ v pásmu šířky $3B$ atd. Uvedených vlastností nelineárních soustav využíváme např. u násobičů kmitočtu.

Přivedeme-li na nelineární soustavu

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$$

biharmonický signál

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t,$$

bude odezva

$$y(t) = \frac{1}{2} [a_2 A_1^2 + a_2 A_2^2] + a_1 A_1 \cos \omega_1 t + a_1 A_2 \cos \omega_2 t + \\ + \frac{1}{2} [a_2 A_1^2 + a_2 A_2^2] (\cos 2\omega_1 t + \cos 2\omega_2 t) + \\ + a_2 A_1 A_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t].$$

Je zřejmé, že vznikají nejen násobky původních kmitočtů, ale také kombinační kmitočty. Můžeme-li operátor přenosu vyjádřit mnohočlenem k -tého stupně, vzniknou kmitočty (úhlové)

$$\omega = 0,$$

$$\omega = n\omega_1, \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

$$\omega = n\omega_2, \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

$$\omega = |n\omega_1 \pm m\omega_2|, \quad n, m = 1, 2, \dots, k, \quad n + m < k.$$

Vznik kombinačních kmitočtů (intermodulační zkreslení) může být nežádoucí. Na druhé straně se ho využívá u modulačních soustav.

7.3 PŘENOS NÁHODNÝCH SIGNÁLŮ SOUSTAVAMI

Jak jsme již uvedli, považujeme v radiotechnice za náhodné nejen rušivé signály, ale také signály užitečné. Je proto namístě věnovat pozornost některým základním otázkám přenosu náhodných signálů lineárními i nelineárními soustavami, na které můžeme obvykle každý radiotechnický systém převést. Můžeme uvažovat úlohy dvou typů:

1. Určení číselných charakteristik, zejména korelační funkce a spektrální výkonové hustoty na výstupu soustavy (minimální úloha).
2. Určení vícerozměrné hustoty pravděpodobností na výstupu soustavy (maximální úloha).

Z řešení úlohy druhého typu můžeme obdržet i řešení úlohy prvního typu.

7.3.1 Přenos náhodných signálů lineárními soustavami

Lineární soustava s impulsovou odezvou $h(t)$ transformuje náhodný proces $X(t)$ na vstupu na náhodný proces $Y(t)$ na výstupu podle vztahu (7.4)

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Střední hodnota procesu na výstupu bude pro fyzikálně realizovatelnou soustavu

$$\bar{y}(t) = E[Y(t)] = E\left[\int_0^t h(t-\tau) X(\tau) d\tau\right] = \int_0^t h(t-\tau) E[X(\tau)] d\tau. \quad (7.20)$$

Pro korelační funkci výstupního signálu dostaneme

$$B_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1) \cdot Y(t_2)] = E\left[\int_0^{t_1} h(t_1-\tau_1) X(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} h(t_2-\tau_2) X(\tau_2) d\tau_2\right] = \\ = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1) h(t_2-\tau_2) E[X(\tau_1) \cdot X(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) B_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (7.21)$$

Tyto vztahy se poněkud zjednoduší, je-li vstupní náhodný proces stacionární (viz odst. 6.3.2):

$$\bar{y}(t) = E[Y(t)] = \bar{x} \int_0^t h(t - \tau) d\tau, \quad (7.22)$$

$$B_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) B_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (7.23)$$

Ze vztahů (7.22) a (7.23) je zřejmé, že výstupní náhodný proces není stacionární, protože se projevuje přechodový jev způsobený připojením procesu. V případě, že od okamžiku $t = 0$ připojení procesu uplynul dostatečně dlouhý čas, tj. nastal ustálený stav, blíží se $Y(t)$ stacionárnímu procesu a vztahy (7.22) a (7.23) přejdou na

$$\bar{y}(t) = \bar{x} \int_0^\infty h(\tau) d\tau = \bar{y}, \quad (7.24)$$

$$B_Y(t_2 - t_1) = B_Y(\tau) = \int_0^{+\infty} h(\lambda) \left[\int_0^{+\infty} h(t) B_X(\tau + \lambda - t) dt \right] d\lambda. \quad (7.25)$$

V ustáleném stavu, kdy je náhodný proces $Y(t)$ stacionární, můžeme určit jeho spektrální výkonovou hustotu. Vzhledem k tomu, že předpokládáme realizovatelné systémy, můžeme meze integrálů rozšířit k $-\infty$. Předpokládáme-li nulovou střední hodnotu, můžeme psát

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= F[R_Y(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + \lambda - t) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + \lambda - t) e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega(\lambda - t)} d\tau = \\ &= H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot S_X(\omega). \end{aligned}$$

Je tedy spektrální výkonová hustota $S_Y(\omega)$ náhodného procesu na výstupu vázána se spektrální výkonovou hustotou $S_X(\omega)$ na vstupu vztahem

$$\boxed{S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)} \quad (7.26)$$

Fyzikální interpretace (7.26) je zřejmá; $|H(\omega)|$ představuje amplitudovou charakteristiku a tedy $|H(\omega)|^2$ výkonovou. Spektrální složky na výstupu lineárního systému jsou úměrné složkám na vstupu násobeným výkonovou charakteristikou. Výpočet korelační funkce $R_Y(\tau)$ pomocí Wiener-Chinčinovy věty ze spektrální výkonové hustoty $S_Y(\omega)$ je často jednodušší než výpočet pomocí impulsové charakteristiky.

7.3.1.1 Přenos bílého šumu lineární soustavou

Všimněme si nyní případu důležitého v praxi, kdy na vstup lineární soustavy působí stacionární náhodný proces se spektrální výkonovou hustotou rovnoměrnou na všech kmitočtech (bílý šum) (viz obr. 6.37)

$$S_X(\omega) = N_0 = \text{konst.}, \quad \omega \in (-\infty, +\infty).$$

Za bílý šum často považujeme šumy přijímačů, které mají spektrální výkonovou hustotu konstantní v širokém pásmu kmitočtů. Intenzita N_0 těchto šumů na jednotku pásma se rovná FkT , kde k je Boltzmannova konstanta, T je absolutní teplota ($kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$ pro $T = 288\text{K}$) a F je šumové číslo přijímače.

Spektrální výkonová hustota na výstupu lineární soustavy je

$$S_Y(\omega) = N_0 |H(\omega)|^2,$$

tj. její průběh odpovídá průběhu čtverce amplitudové charakteristiky soustavy.

Pro praktické výpočty se často používá šumová šířka pásma soustavy. Máme-li soustavu s amplitudovou charakteristikou $A(\omega) = |H(\omega)|$, nabývající max. hodnoty na úhlovém kmitočtu ω_0 , nahradíme ji obdélníkovou charakteristikou

$$A_i(\omega) = \begin{cases} 0 & ; |\omega - \omega_0| > \pi B_N \\ A(\omega_0) & ; |\omega - \omega_0| < \pi B_N \end{cases}$$

tak, aby výkon bílého šumu přenesený oběma soustavami byl stejný (odpovídá např. obr. 6.35). Šířku B_N nazýváme šumovou šířkou pásma soustavy.

$$B_N = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) d\omega}{S_Y(\omega_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{2\pi |H(\omega_0)|^2}.$$

To můžeme také přepsat (viz (6.149))

$$B_N = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) d\omega}{N_0 |H(\omega_0)|^2} = \frac{R_Y(0)}{2N_0 |H(\omega_0)|^2}. \quad (7.27)$$

Korelační funkci výstupního procesu dostaneme buď jako zpětnou Fourierovu transformaci $S_Y(\omega)$, nebo ze (7.25) a (6.156)

$$\begin{aligned} B_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) N_0 \delta(\tau + \lambda - t) dt d\lambda = \\ &= N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) h(\tau - t) dt. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Korelační funkce na výstupu lineární soustavy souhlasí až na konstantního činitele s konvolucí impulsové odezvy soustavy.

Doba korelace bílého šumu přeneseného lineární soustavou (už není "bílý") je podle (6.128), (6.148)

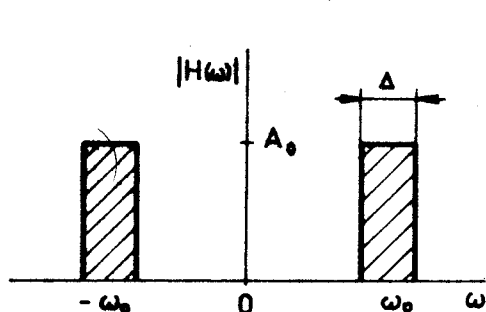
$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) d\tau}{R_Y(0)} = \frac{\frac{1}{2} S(0)}{R_Y(0)} = \frac{N_0 |H(0)|^2}{R_Y(0)} \quad (7.29)$$

Desadíme-li (7.27) dostaneme

$$t_0 = \frac{1}{2B_N} \quad (7.30)$$

tj. doba korelace je stejného řádu jako převrácená hodnota šumové šířky pásma lineární soustavy.

Zajímavý případ nastane, když jde o ideální pásmovou propust (viz obr. 7.9). Spektrální výkonová hustota na výstupu je



$$S_Y(\omega) = \begin{cases} N_0 A_0^2 & |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

a korelační funkce na výstupu ideálního filtru, na jehož vstupu je bílý šum, je

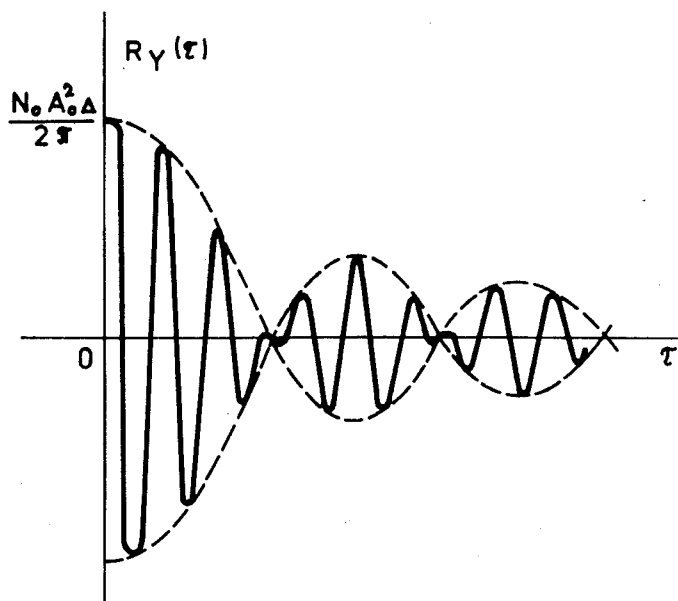
Obr. 7.9

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta/2}^{\omega_0 + \Delta/2} N_0 A_0^2 \cos \omega \tau d\omega = \frac{N_0 A_0^2}{\pi \tau} [\sin(\omega_0 + \frac{\Delta}{2}) \tau - \sin(\omega_0 - \frac{\Delta}{2}) \tau] = \\ &= 2 \frac{N_0 A_0^2}{\pi \tau} \sin \frac{\Delta \tau}{2} \cos \omega_0 \tau = \frac{N_0 A_0^2 \Delta}{\pi} \frac{\sin \frac{\Delta \tau}{2}}{\frac{\Delta \tau}{2}} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (7.31)$$

viz obr. 7.10. Tento proces je příkladem úzkopásmového náhodného procesu, jehož spektrum je omezeno na úzké kmitočtové pásmo symetrické kolem vysokého úhlového kmitočtu ω_0 . Korelační funkce je součinem pomalu se měnící funkce $Sa(\frac{\Delta \tau}{2})$ a vysokofrekvenční složky $\cos \omega_0 \tau$. Doporučujeme čtenáři, aby si ověřil, že korelační funkce náhodného procesu na výstupu ideální dolní propusti bude až na konstantu odpovídat čárkované čáře v obr. 7.10 a že vztah mezi korelačními funkcemi procesů na výstupu ideální dolní propusti a ideální pásmové propusti odpovídá výrazu (6.157).

Rozptyl na výstupu ideální pásmové propusti je

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{N_0 A_0^2 \Delta}{\pi}$$



Obr. 7.10

7.3.1.2 Obálka a fáze normálního náhodného procesu na výstupu úzkopásmové lineární soustavy

V této kapitole jsme se zabývali základními charakteristikami náhodných procesů podrobných lineární transformací. Pro stanovení simultánních hustot nízkých řádů můžeme použít metod popsaných v odst. 6.2.6. Obecná otázka řešení hustoty pravděpodobnosti náhodného procesu na výstupu lineární soustavy je podstatně těžší.

Poměrně jednoduše ji lze řešit v případě, kdy náhodný proces na vstupu lineární soustavy má normální rozložení. Potom náhodný proces na výstupu má také normální rozložení, i když se změněnými parametry.

Jestliže náhodný proces na vstupu nemá normální rozložení, není obecně rozložení pravděpodobnosti náhodného procesu na výstupu soustavy normální. Avšak, zhruba řečeno, je rozložení náhodného procesu na výstupu "bližší" normálnímu rozložení než rozložení náhodného procesu na vstupu.

Z těchto důvodů se budeme zabývat jen problémem rozložení obálky a fáze normálního náhodného procesu. Tento problém se vyskytne vždy v jednodušších případech demodulace a detekce signálu v radiových komunikačních a radiolokačních systémech.

V kapitole 3.7. jsme se zabývali obálkou a fází determinovaných signálů. Podobně při splnění některých velice obecných předpokladů [21] můžeme získat z daného stacionárního náhodného procesu $X(t)$ nový přidružený (adjungovaný) stacionární náhodný proces

$$Y(t) = H[X(t)] = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (7.32)$$

a výchozí náhodný proces (za předpokladu, že má nulovou střední hodnotu) můžeme vyjádřit

$$X(t) = E(t) \cos \Theta_0(t), \quad (7.33)$$

kde náhodný proces $E(t)$ je obálka

$$E(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}. \quad (7.34)$$

$$\Theta_0(t) = \arctg \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (7.35)$$

je fáze původního procesu $X(t)$. Takto vyjádřený náhodný proces $X(t)$ můžeme považovat za harmonické kmity modulované amplitudově a fázově náhodnými funkcemi $E(t)$ a $\Theta_0(t)$.

Předpokládáme nyní, že $X(t)$ je úzkopásmový proces s velmi úzkou energetickou šířkou spektra soustředěného kolem vysokého úhlového kmitočtu ω_0 . Potom se jeho obálka $E(t)$ (viz $A(t)$ obr. 3.20) mění ve srovnání s $\cos \Theta_0(t)$ v čase poměrně pomalu. Její spektrální výkonová hustota je soustředěna v nízkofrekvenční oblasti a spektrum je velmi úzké. Vzhledem k vyjádření korelační funkce pomocí spektra (výraz (6.149)) a závěrům kap. 3.4 se pak korelační funkce obálky mění v závislosti na τ velmi pomalu a hodnoty $E(t)$ jsou silně korelovány (to neplatí pro korelační funkci $X(t)$ - vztah mezi spektrem $E(t)$ a $X(t)$ je jako na obr. 6.39 a tudíž vztah mezi korelační funkcí $E(t)$ a $X(t)$ odpovídá výrazu (6.157) - jako příklad uveďme odst. 7.3.1.1, obr. 7.10).

Je-li ω_0 střední úhlový kmitočet, kolem něhož je rozloženo úzkopásmové spektrum náhodného procesu $X(t)$, je fáze

$$\Theta_0(t) = \omega_0 t - \Theta(t), \quad (7.36)$$

přičemž náhodný proces $\Theta(t)$ se rovněž mění v čase pomalu ve srovnání s $\cos \Theta_0(t)$ (rychle se mění $\omega_0 t$, protože ω_0 je vysoké).

Desazením (7.36) do (7.33) dostaneme pro úzkopásmový náhodný proces výraz

$$X(t) = E(t) \cos \Theta(t) \cos \omega_0 t + E(t) \sin \Theta(t) \sin \omega_0 t,$$

který, zavedeme-li náhodné procesy $A(t)$, $C(t)$

$$A(t) = E(t) \cos \Theta(t), \quad (7.37)$$

$$C(t) = E(t) \sin \Theta(t), \quad (7.38)$$

přejde na

$$X(t) = A(t) \cos \omega_0 t + C(t) \sin \omega_0 t. \quad (7.39)$$

Ze vztahů (7.37) a (7.38) lze najít vyjádření obálky a fáze pomocí $A(t)$ a $C(t)$ které nezávisí na ω_0 :

$$E(t) = \sqrt{A^2(t) + C^2(t)}, \quad (7.40)$$

$$\Theta(t) = \arctg \frac{C(t)}{A(t)}. \quad (7.41)$$

Protože proces $X(t)$ byl stacionární, musí být stacionární i $A(t)$ a $C(t)$ (7.39) a také $E(t)$ a $\Theta(t)$ ((7.37) a (7.38)). Uveďme dále bez důkazu, že je-li původní náhodný proces $X(t)$ stacionární a normální, pak platí [21]:

- 1) Proces $Y(t)$ je stacionární normální,
- 2) Simultánní rozložení $X(t)$ a $Y(t)$ je normální a procesy jsou ve stej-

ných okamžicích nezávislé.

- 3) Procesy $A(t)$ a $C(t)$ mají stejnou korelační funkci jako proces $X(t)$ a tedy také stejný rozptyl.
- 4) Náhodné procesy $A(t)$ a $C(t)$ jsou normální a nezávislé ve stejných časech.

Předpokládejme nyní, že na vstupu úzkopásmové lineární soustavy je kromě normálního náhodného procesu (7.39) také signál $S(t)$. Signál $S(t)$ jsou vysokofrekvenční kmity s kmitočtem ω_0 , které jsou amplitudově i fázově modulované, tj. můžeme psát

$$s(t) = a(t) \cos \omega_0 t + c(t) \sin \omega_0 t. \quad (7.42)$$

Potom na výstupu lineární soustavy je náhodný proces

$$Z(t) = [A(t) + a(t)] \cos \omega_0 t + [C(t) + c(t)] \sin \omega_0 t, \quad (7.43)$$

který opět můžeme vyjádřit pomocí obálky a fáze

$$Z(t) = E(t) \cos [\omega_0 t + \Theta(t)] \quad (7.44)$$

kde v souladu s výrazy (7.39) - (7.41) je

$$E(t) = \sqrt{[A(t) + a(t)]^2 + [C(t) + c(t)]^2} \quad (7.45)$$

a

$$\Theta(t) = \arctg \frac{C(t) + c(t)}{A(t) + a(t)}. \quad (7.46)$$

Úloha určení hustoty pravděpodobnosti obálky se nyní shoduje s úlohou, kterou jsme řešili v odst. 6.2.7. Pro daný čas máme dvě normální náhodné veličiny $[A(t) + a(t)]$ a $[C(t) + c(t)]$ se středními hodnotami $a(t)$ a $c(t)$ a se stejnými rozptyly. Určují souřadnice náhodného bodu. Vzdálenost R bodu od počátku odpovídá hodnotě obálky $E(t)$ a má Rayleigh-Riceovo rozložení pravděpodobností

$$f(r, t) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + \alpha^2(t)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r\alpha(t)}{\sigma^2}\right) & \text{pro } r > 0 \\ 0 & \text{pro } r \leq 0 \end{cases} \quad (7.47)$$

kde $\alpha^2(t) = a^2(t) + c^2(t)$. Připomeňme, že s růstem $\frac{\alpha}{\sigma}$ se rozložení blíží normálnímu (r jsou hodnoty obálky $E(t)$).

Chybí-li v náhodném procesu determinovaný signál, přejde rozložení na rozložení Rayleighovo.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & r > 0, \\ 0 & r \leq 0. \end{cases} \quad (7.48)$$

Distribuční funkce obálky, tj. pravděpodobnost, že obálka $E(t)$ nepřekročí danou hodnotu r , je

$$P(E(t) < r) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^r r e^{-\frac{r^2 + \alpha^2(t)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r\alpha(t)}{\sigma^2}\right) dr,$$

což po úpravě [21] dá

$$P(E(t) < r) = e^{-\frac{r^2 + \alpha^2(t)}{2\sigma^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^n I_n\left(\frac{\alpha r}{\sigma^2}\right). \quad (7.49)$$

Abychom určili jednorozměrné rozložení fáze náhodného procesu (7.44), vraťme se k článku 6.2.6. Podle něj jsme v článku 6.2.7 určili obecný vztah

$$f_{R,\Theta}(r, \varphi) = r f_{X,Y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (7.50)$$

Proteže hustota $f_{X,Y}$ je dvourozměrná hustota pravděpodobnosti nezávislého náhodného procesu, dostaneme

$$f_{R,\Theta}(r, \varphi, t) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{[r \cos \varphi - a(t)]^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{[r \sin \varphi - c(t)]^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.51)$$

Potom jednorozměrná hustota pravděpodobnosti fáze je

$$f_{\Theta}(\varphi, t) = f(\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{[r \cos \varphi - a(t)]^2 + [r \sin \varphi - c(t)]^2}{2\sigma^2}} dr.$$

Zavedeme-li

$$\alpha^2(t) = a^2(t) + c^2(t),$$

$$\varphi_0(t) = \arctg \frac{c(t)}{a(t)},$$

dostaneme

$$f(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2(t)}{2\sigma^2}} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2 - 2r\alpha(t)\cos[\varphi - \varphi_0(t)]}{2\sigma^2}} dr.$$

Doplníme-li exponent na úplný čtverec a provedeme substituci

$z = r - \alpha(t) \cos[\varphi - \varphi_0(t)]$, dostaneme

$$f(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2(t)}{2\sigma^2}} \sin^2[\varphi - \varphi_0(t)] \int_{-\alpha(t)\cos[\varphi - \varphi_0(t)]}^{\infty} \left\{ z + \alpha(t) \cos[\varphi - \varphi_0(t)] \right\} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz. \quad (7.52)$$

Integrál (7.52) rozdělíme na dva integrály. Prvý z nich vede na Γ funkci a druhý je Laplaceova funkce ϕ (viz (6.90)) a výsledek dá

$$f(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2(t)}{2\sigma^2}} + \frac{\alpha(t) \cos[\varphi - \varphi_0(t)]}{\sigma \sqrt{2\pi}} \phi \left[\frac{\alpha(t)}{\sigma} \cos[\varphi - \varphi_0(t)] \right] e^{-\frac{\alpha^2(t)}{2\sigma^2} \sin^2[\varphi - \varphi_0(t)]},$$

$$\varphi_0(t) - \pi \leq \varphi \leq \varphi_0(t) + \pi. \quad (7.53)$$

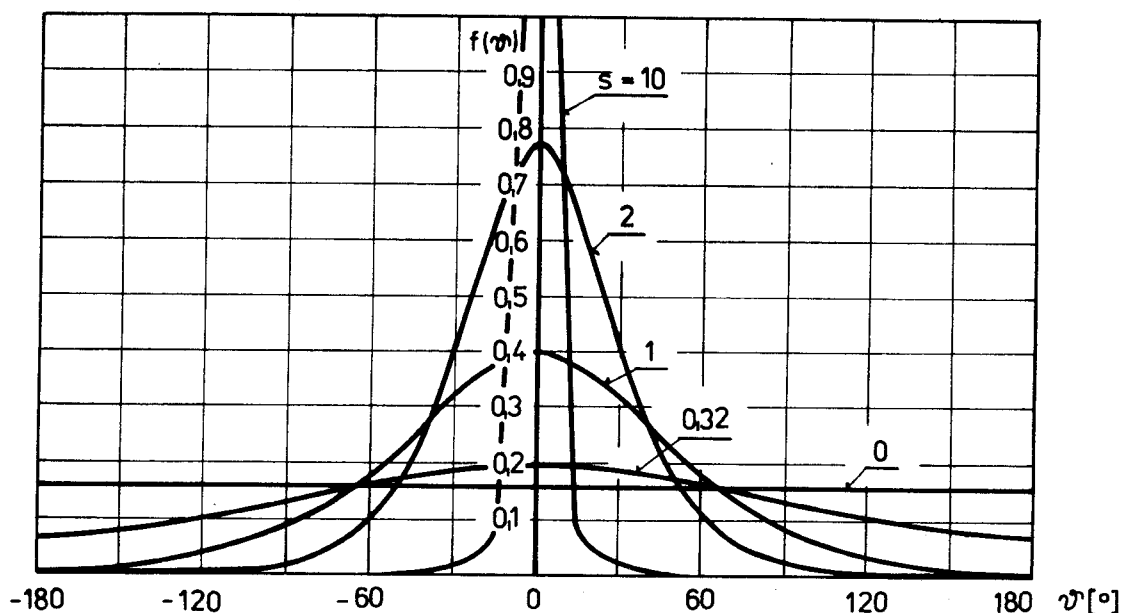
Předpokládejme nyní, že signálem jsou harmonické kmity s úhlovým kmitočtem ω_0 , amplitudou u_0 , tj. $s(t) = u_0 \cos \omega_0 t$ a $\alpha(t) = u_0 \varphi_0(t) = 0$

$$f(\varphi, t) = f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{S^2}{2}} + \frac{S \cos \varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2 \sin^2 \varphi}{2}} \phi[S \cos \varphi],$$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi$$

(7.54)

kde S je poměr amplitudy signálu ke směrodatné odchylce šumu. Křivky hustoty pravděpodobnosti fáze normálního náhodného procesu po průchodu lineární úzkopásmovou soustavou jsou na obr. 7.11.



Obr. 7.11

Porovnáme-li součin hustoty pravděpodobnosti obálky (7.47) a hustoty fáze (7.52) se simultánní hustotou (7.51), zjišťujeme, že (pro stejné okamžiky) nejsou obálka a fáze nezávislé. Pouze neobsahuje-li signál determinovanou složku ($S=0, \alpha(t)=\alpha(t)=c(t)=0$), je (7.51) roven součinu (7.54) a (7.48), tj. obálka

a fáze jsou nezávislé.

Z tvaru hustoty pravděpodobnosti plyne, že střední hodnota fáze

$$E[\Theta] = 0.$$

Rozptyl pro slabé signály je [21]

$$\sigma_{\Theta}^2 = \frac{\pi^2}{3} - s \sqrt{2\pi} \quad ; \quad s \ll 1, \quad (7.55)$$

pro silné

$$\sigma_{\Theta}^2 = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad s \gg 1. \quad (7.56)$$

Řadu vztahů pro aproximaci hustoty fáze nalezneme čtenář ve [21].

7.3.2 Přenos náhodných signálů nelineárními soustavami

Náhodný proces $Y(t)$ na výstupu nelineární soustavy je se vstupním náhodným procesem $X(t)$ vázán operátorem soustavy (7.1). Potom korelační funkce výstupního procesu je

$$\begin{aligned} B_Y(t_1, t_2) &= E[A\{X(t_1)\} \cdot A\{X(t_2)\}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A\{x_1\} A\{x_2\} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Je-li náhodný proces $X(t)$ stacionární, bude i $A\{X(t)\}$ stacionární a jeho korelační funkce bude

$$B_Y(\tau) = E[A\{X(t)\} \cdot A\{X(t+\tau)\}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A\{x_1\} A\{x_2\} f(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (7.58)$$

a střední hodnotu nalezneme jako

$$E^2[Y(t)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} B_Y(\tau).$$

Protože hodnoty x_1 a x_2 se pro $\tau \rightarrow +\infty$ stávají nezávislé, dostaneme

$$E^2[Y(t)] = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A\{x\} f(x) dx \right]^2$$

a tedy

$$\bar{y} = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} A\{x\} f(x) dx. \quad (7.59)$$

Rozptýl určíme z hodnoty korelační funkce v nule. Uvažíme-li, že pro $\tau \rightarrow 0$ je $f(x_1, x_2; \tau) = f(x) \delta(x_2 - x_1)$, dostaneme ze (7.58)

$$B_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\{x\} f(x) dx = \sigma_Y^2 + \bar{y}^2. \quad (7.60)$$

Přímý výpočet integrálů (7.59) a (7.60) je obtížný. Proto se často hustota pravděpodobnosti v (7.58) rozkládá tak, aby proměnné x_1 a x_2 byly rozděleny. Metody jsou blíže popsány ve [217].

Pro určení hustoty pravděpodobnosti využíváme metod popsaných v odst. 6.2.6.

8. MODULOVANÉ SIGNÁLY

Jak jsme uvedli v první kapitole, přenášíme zprávy v podobě signálů. Signál, který odpovídá zprávě, není ve většině případů vhodný pro rádiový přenos a to ze dvou hlavních důvodů:

- 1) vyzařování antény na kmitočtech, na nichž se nachází spektrum signálu, není dostatečně efektivní,
- 2) je třeba od sebe oddělit spektra signálů různých uživatelů společného přenosového média (volného prostoru).

Proto je třeba signál transformovat tak, aby jeho spektrum leželo ve vhodném pásmu kmitočtů. Transformace spočívá v tom, že signálem nesoucím zprávu (primárním) ovlivňujeme parametry jiného signálu (sekundárního) tak, aby jeho spektrum splňovalo požadavky na přenos [47].

Zmíněné transformaci říkáme modulace, primárnímu signálu signál modulační, sekundárnímu signálu signál nosný (někdy také nosná vlna, nebo jen nosná). Modulací se z nosného signálu stává modulovaný signál.

V radiotechnice je nosnou nejčastěji harmonický vysokofrekvenční signál. Spektrum modulačního signálu je úzké a nachází se (relativně k signálu nosnému) v nízkofrekvenční oblasti. Proto modulované signály můžeme ve většině případů považovat za úzkopásmové.

Nosné i modulační signály mohou být jak determinované, tak náhodné. V tomto textu budou nosné i modulační signály determinované.

V 1. kapitole jsme signály rozdělili na

- 1) (spojité) signály (se spojitým časem),
- 2) diskrétní signály (se spojitým časem),
- 3) spojitě posloupnosti (spojitý signál s diskrétním časem),
- 4) diskrétní posloupnosti.

Jak modulační, tak nosný signál může patřit do jedné z těchto 4 tříd, takže by bylo možné uvést 16 typů modulací.

Nejčastěji se vyskytuje případ harmonického nosného signálu (spojitého se spojitým časem). Modulační signály mohou být všech čtyř typů. Těchto typů nosných a modulačních signálů se používá u amplitudové a úhlové modulace.

Pokud použijeme nosný signál s diskrétním časem, je nutné v případě modulačních signálů se spojitým časem zajistit tzv. vzorkování, u signálů s diskrétním časem synchronizaci. Těchto typů signálů se používá u impulsové modulace.

U diskrétního nosného signálu s diskrétním časem je třeba kromě tzv. vzorkování zajistit kvantování, příp. kódování. Používá se u impulsové kódové

modulace a dále u tzv. klíčování, u něhož je modulační signál diskrétní.

Ostatní typy modulací se buď vyskytnou zřídka, nebo přejdou na výše uvedené. Budeme se proto dále zabývat:

- 1) modulací harmonického nosného signálu,
- 2) impulsovou modulací,
- 3) kódovou modulací.

Kromě modulace se budeme zabývat demodulací, tedy opačným procesem, při němž z modulovaného signálu získáme původní modulační signál.

Ve všech případech budeme předpokládat, že modulační signál je kmitočtově omezený, tj. jeho spektrum je nenulové pro $|\omega| \leq \omega_m$.

8.1 MODULACE HARMONICKÉHO NOSNÉHO SIGNÁLU

Harmonický signál

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \psi(t)$$

je popsán třemi parametry. Amplitudou, (úhlovým) kmitočtem a fází φ . Všechny tři parametry můžeme ovlivňovat modulačním signálem. Rozeznáváme tedy modulaci amplitudovou, kmitočtovou a fázovou. Při kmitočtové i fázové modulaci ovlivňujeme celkový fázový úhel a nazýváme je proto souhrnně úhlovými modulacemi.

8.1.1 Amplitudová modulace

8.1.1.1 Amplitudová modulace s potlačenou nosnou vlnou

a) Princip modulace

Ovládejme modulačním signálem $S(t)$ přímo amplitudu nosného signálu tak, že je rovna $A_C S(t)$ a tedy modulovaný signál je

$$s_{SC}(t) = A_C s(t) \cos \omega_C t \quad (8.1)$$

(A_C je amplituda nemodulované nosné vlny). V soustavě realizující modulaci se tedy násobí nosná vlna $A_C \cos \omega_C t$ modulačním signálem $s(t)$ (obr. 8.1).

Hledejme nyní spektrum modulovaného signálu. Předpokládejme, že spektrum modulačního signálu je $S(\omega) \leftrightarrow S(t)$. Spektrum nosné jsou dva Diracovy impulsy $A_C \cos \omega_C t \leftrightarrow \pi A_C [\delta(\omega - \omega_C) + \delta(\omega + \omega_C)]$ (viz 3.47). Obraz součinu signálů dá konvolucí

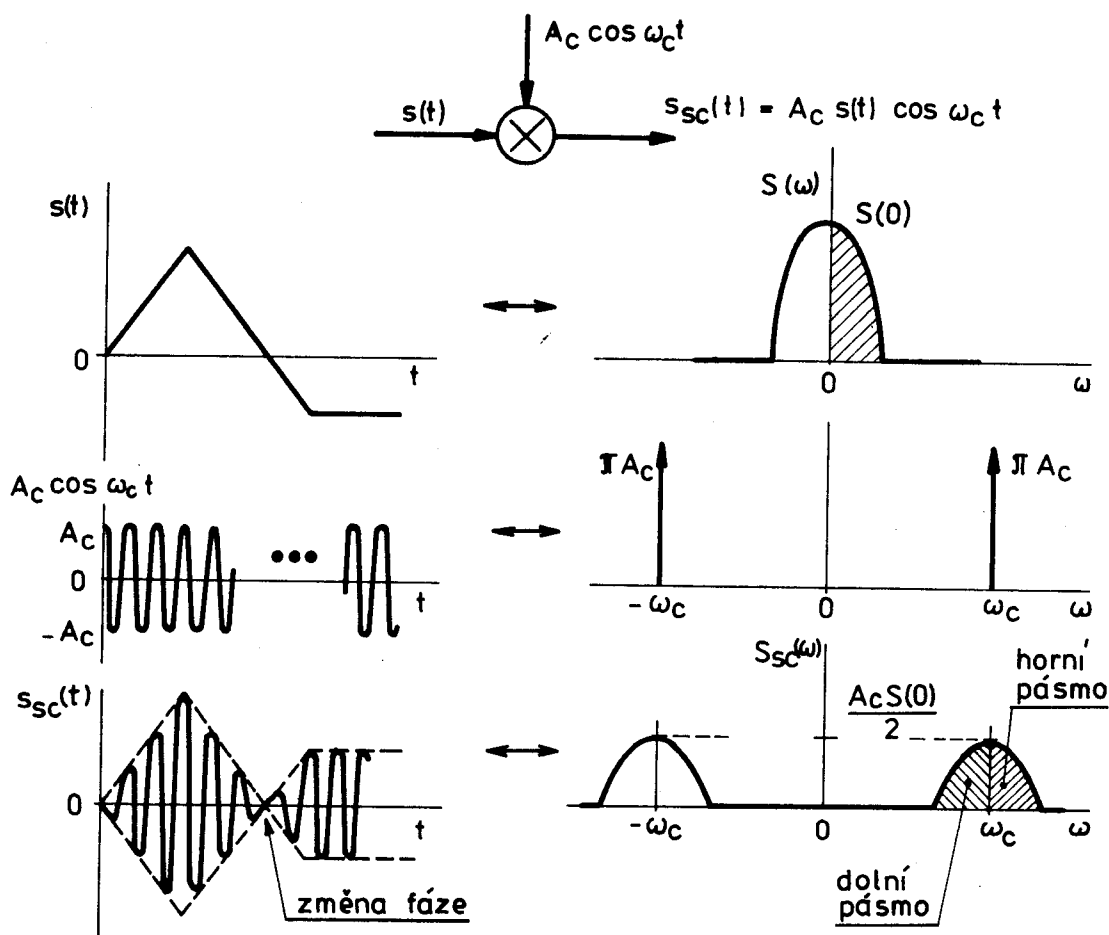
$$S_{SC}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi A_C [\delta(\omega - \omega_C) + \delta(\omega + \omega_C)] * S(\omega),$$

což podle (1.42) je (obr. 8.1)

$$S_{SC}(\omega) = \frac{A_C}{2} [S(\omega - \omega_C) + S(\omega + \omega_C)] \quad (8.2)$$

Z výrazu (8.2) i z obrázku je zřejmé, že:

- 1) Neobsahuje-li spektrum modulačního signálu stejnosměrnou složku, tj. $S(0) = 0$, neobsahuje modulovaný signál složku na kmitočtu nosné, tj. $S(\omega_C) = 0$. Proto tuto modulaci nazýváme modulací s potlačenou nosnou vlnou. Často se značí



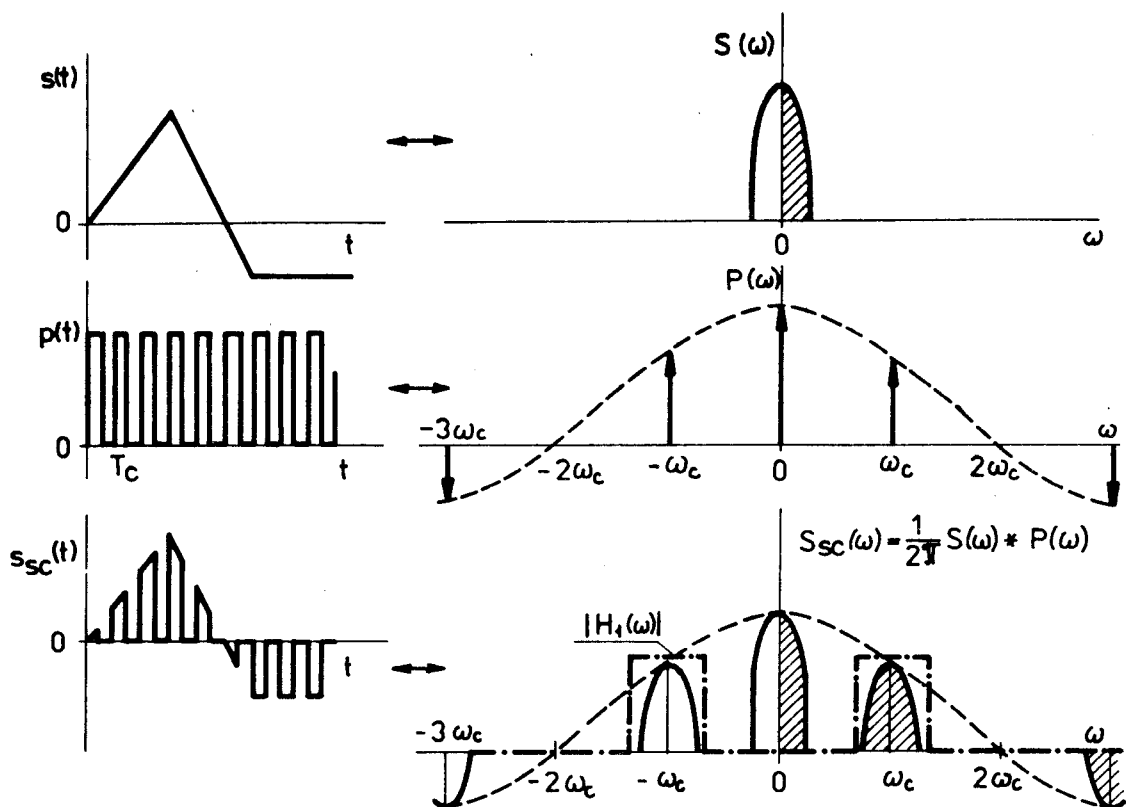
Obr. 8.1

SC (suppressed carrier).

- 2) Šířka pásma modulovaného signálu (tj. fyzikálně existující složky na kladných kmitočtech - v obr. 8.1 šrafováno) je dvojnásobná proti šířce pásma modulačního signálu. Spektrum modulačního signálu se objevuje dvakrát - jako horní a dolní postranní pásmo - symetricky kolem kmitočtu nosné. Proto tuto modulaci nazýváme modulací se dvěma postranními pásmy a někdy značíme DSB-SC (z anglického double-sideband).
- 3) Prochází-li modulační signál nulou a mění znaménko, mění se fáze nosné o 180° .

K získání modulace DSB-SC není nutný harmonický nosný signál. Jako nosnou můžeme použít libovolný periodický signál s periodou $T_C = 2\pi/\omega_C$. Situace je zřejmá z obr. 8.2.

Modulačním signálem $S(t)$ se násobí nosný signál $p(t)$. Spektrum modulovaného signálu získáme konvolucí a tvoří ho laloky kolem násobků kmitočtu ω_C . Filtrací pásmovou propustí odstraníme všechny laloky kromě laloku na kmitočtu ω_C a získáme tak signál DSB-SC.



Obr. 8.2

b) Modulační soustavy DSB-SC

Modulaci DSB-SC můžeme realizovat pomocí

- 1) soustavy proměnné v čase,
- 2) nelineární soustavy.

Soustava proměnná v čase využívá principu podle obr. 8.2. Signál $p(t)$ se realizuje přepínáním a odpojováním modulačního signálu. Součástí soustavy musí být pásmová propust laděná na kmitočet nosné, která potlačí ostatní produkty - viz obr. 8.3. Soustava se může realizovat v podobě tzv. kruhového modulátoru. Předpokládáme-li, že amplituda nosné A_c je vždy $A_c \gg |s(t)|$, pak, je-li napětí v bodě C kladné proti bodu d, jsou všechny diody otevřeny. Úbytek napětí na diodách D_1 a D_2 je stejný, tudíž potenciál svorek a a b je stejný a na výstupu je nulové napětí. Při změně polarit nosné se diody zavřou a na výstupu je signál $S(t)$.

Soustava s nelinearitou je na obr. 8.4. Můžeme-li psát pro závislost proudu nelineárního prvku na přiloženém napětí

$$i = au + bu^2,$$

pak, protože $u_1 = s(t) + \cos \omega_c t$ a $u_2 = -s(t) + \cos \omega_c t$, můžeme psát pro proudy i_1 a i_2

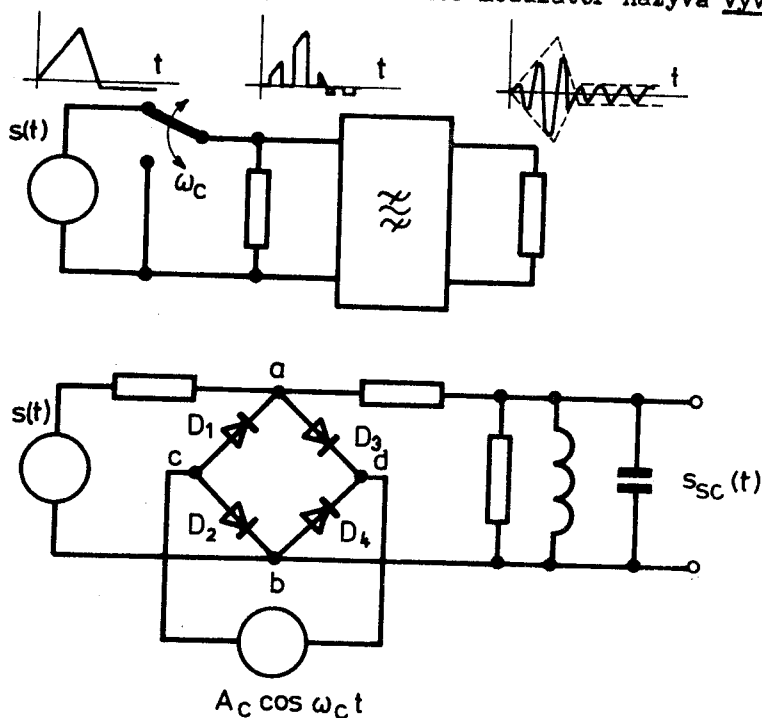
$$i_1 = au_1 + bu_1^2 = a[\cos \omega_c t + s(t)] + b[\cos^2 \omega_c t + 2s(t)\cos \omega_c t + s^2(t)],$$

$$i_2 = au_2 + bu_2^2 = a[\cos \omega_c t - s(t)] + b[\cos^2 \omega_c t - 2s(t)\cos \omega_c t + s^2(t)].$$

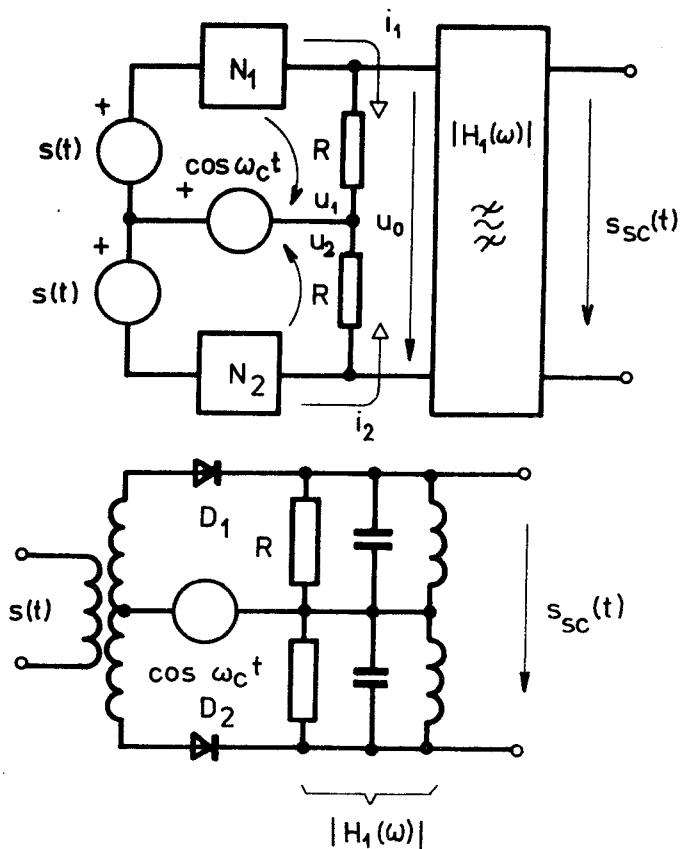
a napětí na vstupních svorkách pásmové propusti je

$$u_o = i_1 R - i_2 R = 2R[as(t) + 2b s(t) \cos \omega_c t].$$

Složku $s(t)$ odfiltrujeme. Vzhledem k symetrickému zapojení modulátoru se nežádoucí produkty (zejména nosná) ruší - proto se tento modulátor nazývá vyvážený.



Obr.8.3



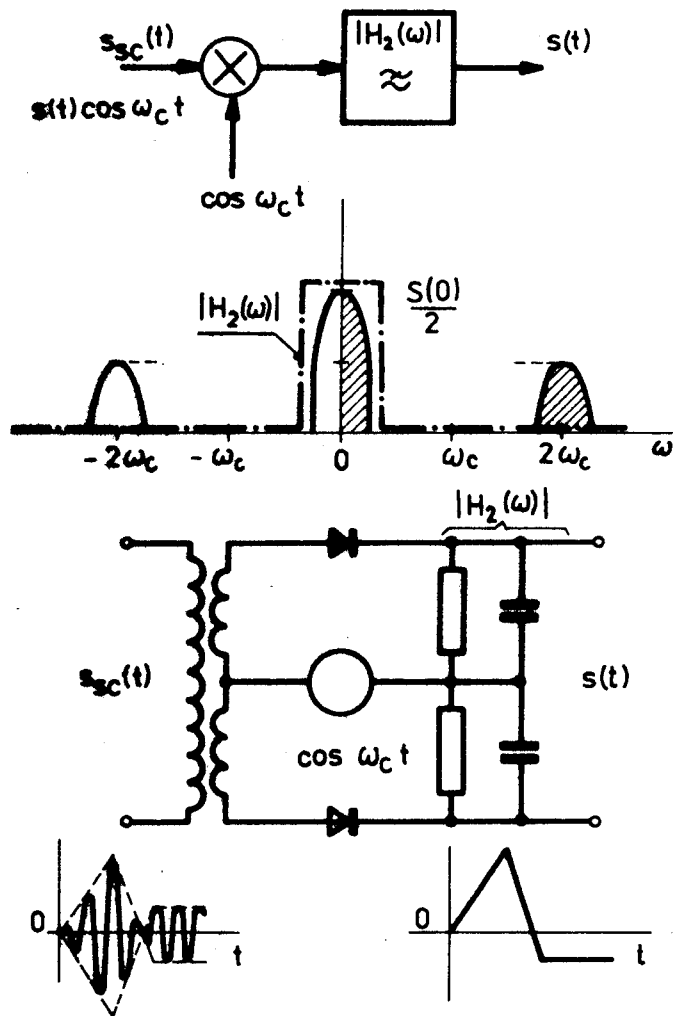
Obr.8.4

c) Demodulace signálů DSB-SC

Demodulace signálů DSB-SC se uskutečňuje stejně jako modulace - tj. násobením, až na to, že za součinným obvodem musí být dolní propust (obr. 8.5). Předpokládáme-li že $A_C = 1$, dostaneme násobením modulovaného signálu $s_{SC}(t)$ kosinusem, jejíž kmitočet je roven kmitočtu nosné, signál (viz 3.16)

$$s(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} s(t) [1 + \cos 2\omega_c t] \longleftrightarrow \frac{1}{2} S(\omega) + \frac{1}{4} [S(\omega - 2\omega_c) + S(\omega + 2\omega_c)]$$

(8.3)



Obr.8.5

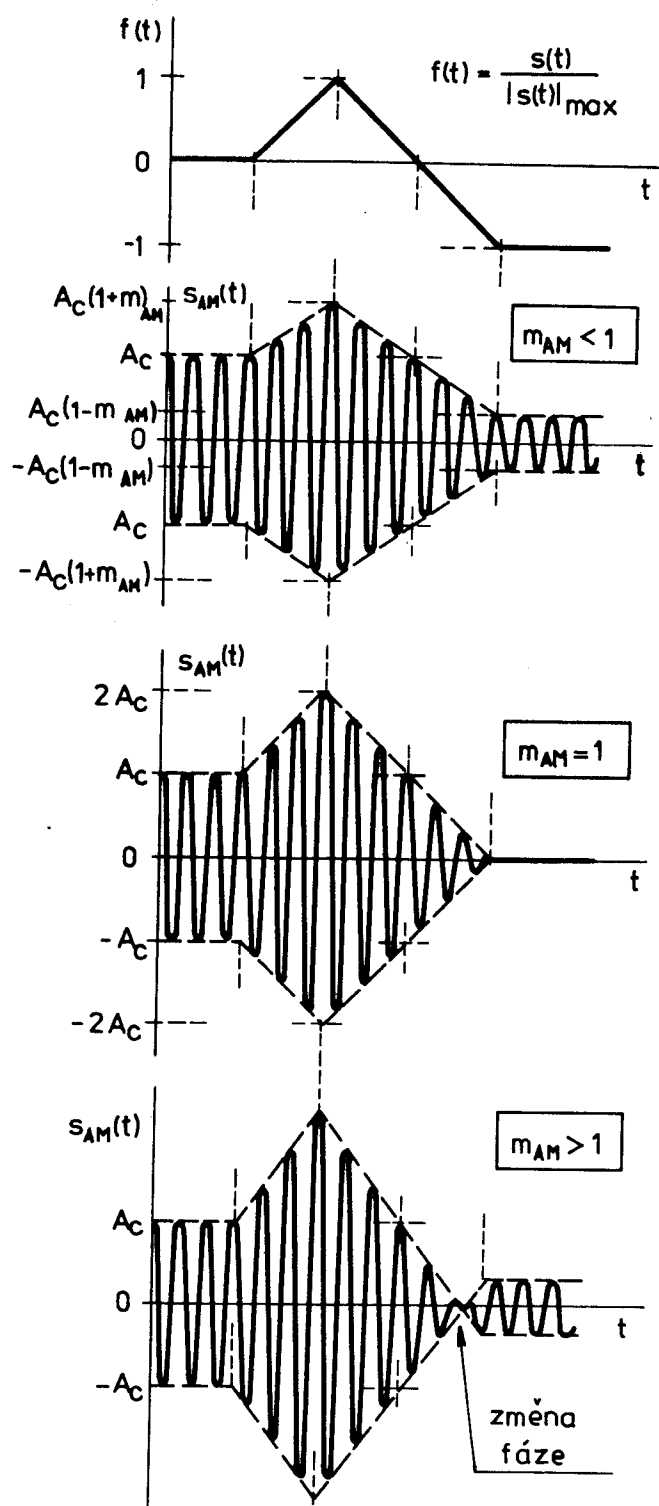
Ten obsahuje, až na konstantu, spektrum původního signálu. Dále obsahuje spektrum posunuté na kmitočet $2\omega_c$. Dolní propustí s amplitudovou charakteristikou $|H_2(\omega)|$ se část spektra kolem kmitočtu $2\omega_c$ potlačí. Z uvedeného je patrné, že struktura demodulátoru DSB-SC je stejná jako struktura modulátoru. Rozdíl je jen v typu filtru.

Signál použitý v demodulátoru nemusí být harmonický - stačí, bude-li periodický (podobně jako při modulaci) s periodou

$T_C = 2\pi / \omega_c$. Potom při demodulaci dostáváme signál (viz (3.17) a (3.32))

$$\begin{aligned} s(t) \cos \omega_c t \cdot p(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} [S(\omega - \omega_c) + S(\omega + \omega_c)] * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_c) \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \{ S[\omega - (n+1)\omega_c] + S[\omega - (n-1)\omega_c] \} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Je zřejmé, že v (8.4) je spektrum původního signálu a další složky, které je třeba potlačit dolní propustí.



Obr.8.6

Uvedené způsoby demodulace vyžadují generovat v demodulátoru signál se stejným kmitočtem, jako je kmitočet původní nosné. Pro to mluvíme o synchronní nebo koherentní demodulaci (někdy i modulaci).

Líší-li se kmitočet signálu generovaného v demodulátoru o $\Delta \omega$ od kmitočtu nosné, bude za součinným členem signál

$$\begin{aligned} S(t) \cos \omega_c t \cos(\omega_c + \Delta \omega) t &= \\ &= \frac{1}{2} S(t) [\cos \Delta \omega t + \\ &+ \cos(2 \omega_c + \Delta \omega) t]. \end{aligned}$$

Složka na kmitočtu $2 \omega_c + \Delta \omega$ se odfiltruje a na výstupu demodulátoru dostaneme signál $\frac{1}{2} S(t) \cos \Delta \omega t$, tj. modulační signál násobený pomalu se měnící funkcí $\cos \Delta \omega t$. Úroveň signálu tedy kolísá.

Nežádoucím způsobem se uplatňuje i fázový posun nosného signálu generovaného v demodulátoru vůči nosnému signálu generovanému v modulatoru. Je-li posun φ , bude výstupní signál demodulátoru

$$S_D(t) = \frac{1}{2} S(t) \cos[\Delta \omega t + \varphi]. \quad (8.5)$$

Je-li $\Delta \omega = 0$, bude úroveň přijímaného signálu stálá a závislá na fázovém posunu. Pro $\varphi = \pm \pi/2$ signál na výstupu demodulátoru zcela vymizí. Tato chyba se uplatní např. při přenosu na velkou vzdálenost, kdy v důsledku kolísání výšky ionosféry se může měnit i fázový posun φ .

Pro generování nosné v přijímači, jejíž kmitočet i fáze souhlasí s kmitočtem a fází nosné ve vysílači, se používá zvláštní obvod, tzv. Costasova smyčka (viz lit. [24], [27], příp. rozbor [37]). Jeho použití je z hlediska ekonomického vhodné tam, kde jde o spojení mezi jedním vysílačem a jedním nebo několika málo přijímači. Je-li přijímačů hodně, je výhodnější vysílat s nosnou vlnou a zjednodušit přijímač.

8.1.1.2 Amplitudová modulace s nosnou vlnou

a) Princip modulace

Přidáme-li k signálu DSB-SC nosný signál, není nutné ho v demodulátoru přijímače generovat. Toto je nejčastější způsob amplitudové modulace. Modulovaný signál je

$$s_{AM}(t) = s(t) \cos \omega_c t + A_c \cos \omega_c t = [A_c + s(t)] \cos \omega_c t. \quad (8.6)$$

To můžeme ještě přepsat

$$s_{AM}(t) = A_c \left[1 + \frac{|s(t)|_{\max}}{A_c} f(t) \right] \cos \omega_c t = A_c [1 + m_{AM} f(t)] \cos \omega_c t. \quad (8.7)$$

Zavedli jsme tak modulační signál $f(t)$, jehož maximální hodnota je rovna jedné

$$f(t) = \frac{s(t)}{|s(t)|_{\max}}. \quad (8.8)$$

Činitel

$$m_{AM} = \frac{|s(t)|_{\max}}{A_c} \quad (8.9)$$

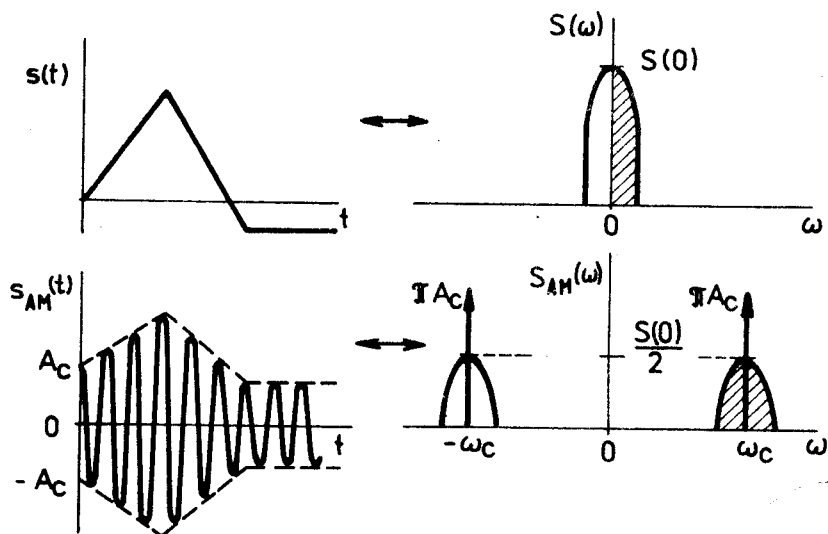
nazýváme činitelem hloubky modulace. Je zřejmé, že při $m_{AM} > 1$, tj. při

$A_c < |s(t)|$ dostáváme předchozí případ modulace, ztrácíme výhodu modulace s nosnou vlnou a signál musíme demodulovat synchronním demodulátorem. Situace pro různé činitele modulace jsou na obr. 8.6.

Spektrum amplitudově modulovaného signálu s nosnou vlnou je (obr. 8.7)

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= [A_c + s(t)] \cos \omega_c t \longleftrightarrow S_{AM}(\omega) = \\ &= \mathcal{T} A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{1}{2} [S(\omega - \omega_c) + S(\omega + \omega_c)]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Je zřejmé, že modulovaný signál má opět dvě postranní pásma a zabírá dvojnásobný interval kmitočtů než původní modulační signál.

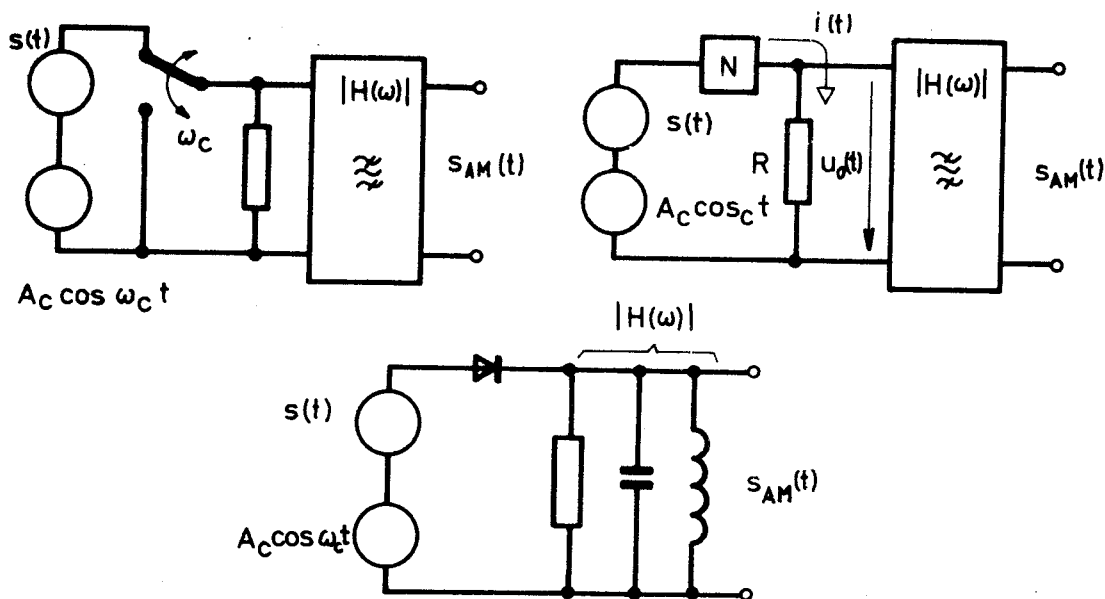


Obr.8.7

b) Modulační soustava pro AM

Porovnáme-li výraz (8.6) s výrazem (8.1), je zřejmé, že můžeme opět použít modulační soustavy (obr. 8.8)

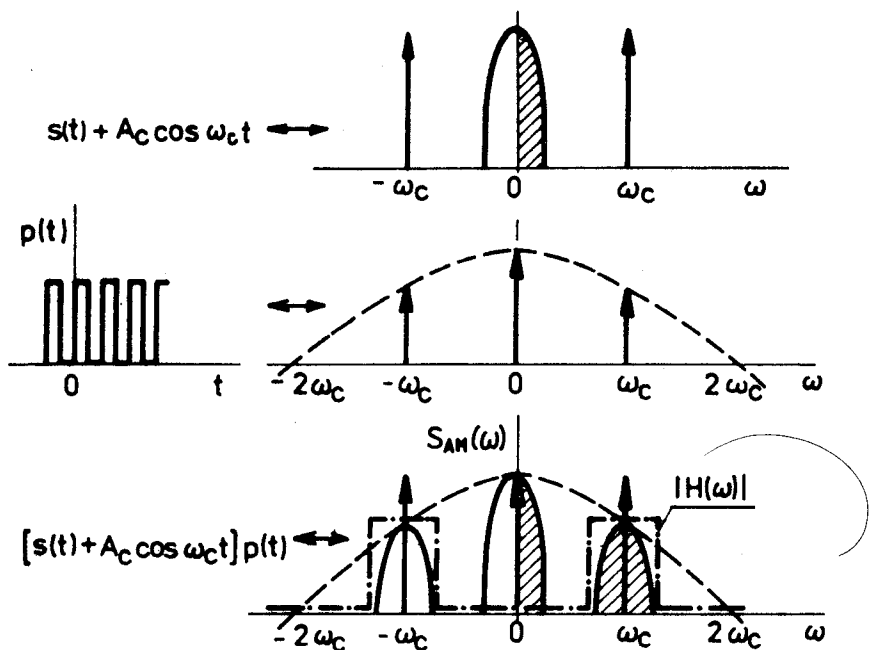
- 1) proměnné v čase,
- 2) s nelinearitou.



Obr. 8.8

U soustavy proměnné v čase, kde je **přepínač**, můžeme opět proces modulace chápat jako násobení signálu $s(t) + A_C \cos \omega_C t$ obdélníkovým signálem $p(t)$ (obr. 8.9). Spektrum tohoto součinu je původní spektrum **posunuté** na násobky ω_C . Filtrací získáme amplitudově modulovaný signál.

U soustavy s nelinearitou získáme výsledek podobně jako u soustavy



Obr.8.9

DSB-SC. Je-li charakteristika nelinearity $i = au + bu^2$, dostaneme

$$\begin{aligned}
 u_0(t) &= R[a s(t) + a A_c \cos \omega_c t + b s^2(t) + 2b s(t) A_c \cos \omega_c t + b A_c^2 \cos^2 \omega_c t] \\
 &= R[a A_c \cos \omega_c t + 2b A_c s(t) \cos \omega_c t] + R[a s(t) + b s^2(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} b A_c^2 (1 + \cos 2\omega_c t)]
 \end{aligned}$$

Prvá hranatá závorka odpovídá modulovanému signálu, druhá složkám, které odfiltrujeme.

Realizace obou systémů může být stejná - záleží na tom, jakou charakteristiku diody uvažujeme. V praxi se používají složitější modulační soustavy. Jejich popis se však vyzývá účelu našeho textu.

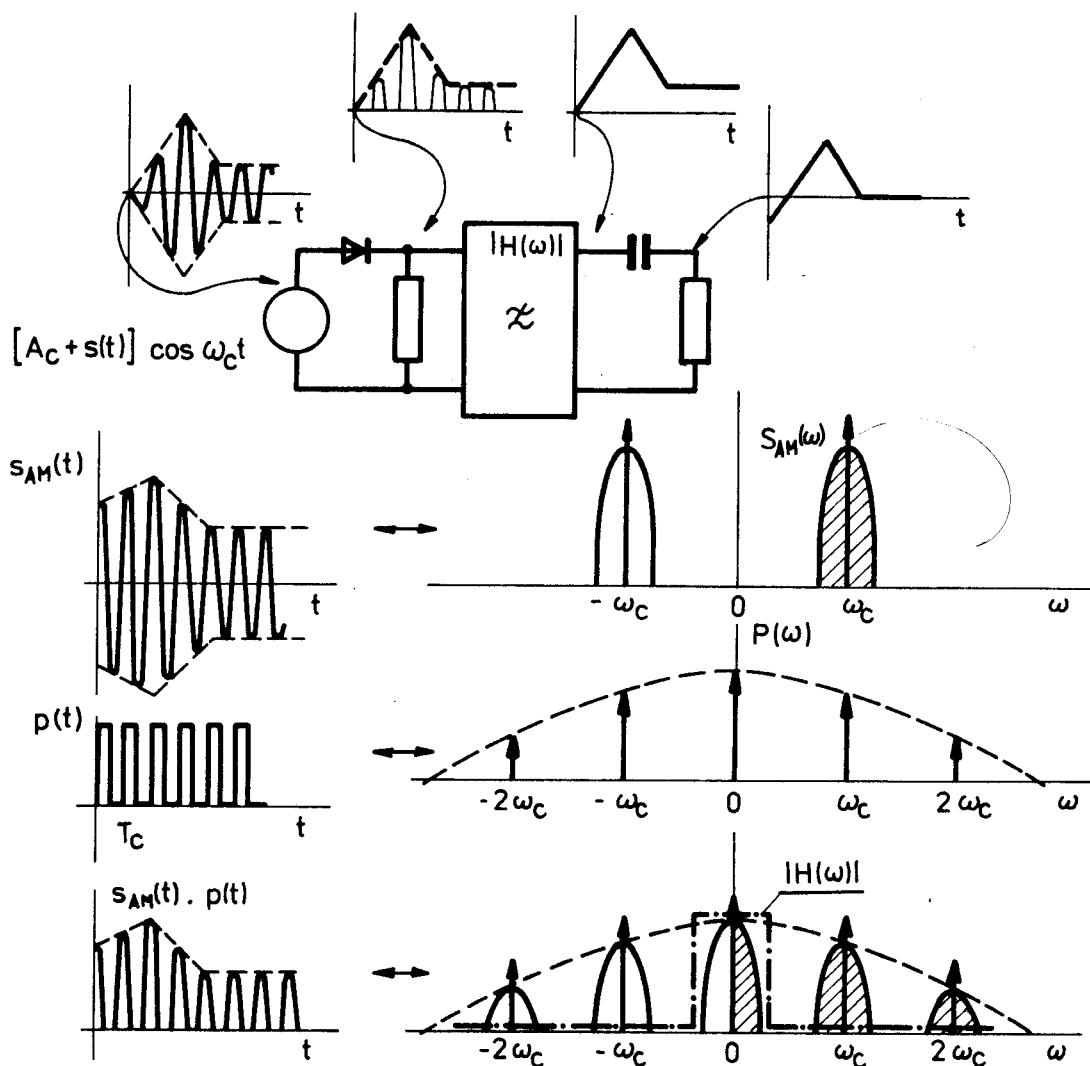
c) Demodulace AM

K demodulaci AM signálů lze použít dvou obvodů /3/, jejichž činnost se zdá být stejná. Jsou to

- 1) detektor s usměrňovačem,
- 2) obálkový detektor.

Činnost obou detektorů je různá. Detektor s usměrňovačem pracuje na principu synchronní detekce, přičemž nosná nutná pro ovládání časově proměnného obvodu je přítomná v signálu. Obálkový detektor je nelineární obvod, jehož výstupní napětí sleduje obálku vstupního signálu.

Usměrnění modulovaného signálu u detektoru s usměrňovačem je ekvivalentní násobení obdélníkovým signálem $p(t)$, jehož perioda $T_C = 2\pi/\omega_c$ odpovídá kmitočtu nosné. Obrazem součinu modulovaného signálu a signálu $p(t)$ je konvoluce spektra $S_{AM}(\omega)$ a posloupnosti Diracových impulsů (obr. 8.10). Výsledkem je posloupnost laloků původního spektra násobených konstantou. Dolní propustí vyfil-



Obr. 8.10

trujeme lalok na nízkém kmitočtu odpovídající modulačnímu signálu $s(t)$.

$$s_{AM}(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} S_{AM}(\omega) + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{lichá}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} S_{AM}(\omega - n\omega_c) \quad (8.11)$$

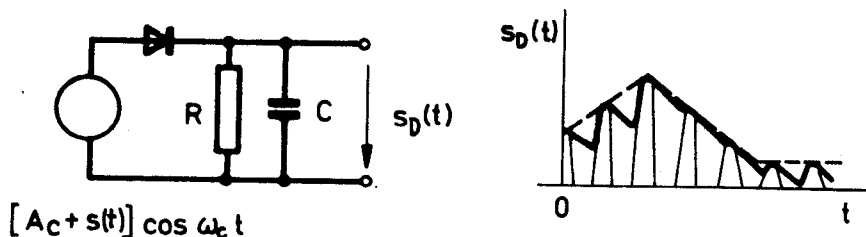
Dosadíme-li do (8.11) za S_{AM} výraz (8.10) a vezmeme-li v úvahu jen členy kolem $\omega = 0$ (ostatní představují složky potlačené filtrem), dostaneme signál na výstupu demodulátoru

$$s_D(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\pi} S(\omega) + 2 A_c \delta(\omega) \quad \left. \vphantom{s_D(t)} \right\} \quad (8.12)$$

tj.

$$s_D(t) = \frac{1}{\pi} [A_c + s(t)]$$

Obálkový detektor je usměrňovač s kapacitou (obr. 8.11). V kladné půlperi-
odě nosné se kondensátor nabíjí přes diodu. Pokud napětí signálu je menší než na-
pětí na kondensátoru, je dioda zavřena, po jeho dosažení se otevírá a kondensá-



Obr. 8.11

tor se dobíjí na max. hodnotu signálu. V záporných půlperiodách se kondensátor vybíjí přes odpor. Časová konstanta RC musí být zvolena tak, aby napětí na kondensátoru sledovalo obálku signálu.

Výstupní napětí obálkového detektoru je $\sqrt{2}$ - krát větší než napětí detektoru s usměrňovačem a kromě toho je tento detektor jednodušší. Proto se vesměs užívá obálkový detektor.

d) Výkon nosného signálu a postranních pásem

Střední výkon modulovaného signálu je

$$\begin{aligned}
 P_{AM} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [A_c + s(t)]^2 \cos^2 \omega_c t \, dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [A_c^2 + 2 A_c s(t) + s^2(t)] \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \omega_c t) \, dt.
 \end{aligned}$$

Střední hodnota $\cos 2 \omega_c t$ je nulová. Obtíže jsou s výpočtem střední hodnoty $s(t) \cos 2 \omega_c t$, příp. $s^2(t) \cos 2 \omega_c t$. Můžeme však použít (3.22) a psát

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos 2 \omega_c t \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[s(t)] \cdot F[\cos 2 \omega_c t] \, d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot 2\pi [\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c)] \, d\omega = \\
 &= S(2\omega_c) + S(-2\omega_c).
 \end{aligned}$$

Je-li max. kmitočet ve spektru $S(t)$ podstatně menší než ω_c , můžeme poslední výraz položit rovný nule. Potom

$$P_{AM} = \frac{A_c^2}{2} + A_c \widetilde{s(t)} + \frac{1}{2} \widetilde{s^2(t)}.$$

Protože předpokládáme přenos signálů bez stejnosměrné složky, je $\widetilde{s(t)} = 0$ a dostáváme

$$P_{AM} = \frac{A_c^2}{2} + \frac{\widetilde{s^2(t)}}{2}. \quad (8.13)$$

První člen výrazu (8.13) představuje výkon nosné vlny, druhý výkon postranních pásem. Část výkonu, který nesou postranní pásma je

$$\eta = \frac{\widetilde{s^2(t)}}{A_C^2 + \widetilde{s^2(t)}} \quad (8.14)$$

Výraz (8.14) můžeme chápat jako účinnost přenosu.

Je-li modulačním signálem harmonický signál

$$s(t) = A_m \cos \omega_m t,$$

je

$$\widetilde{s^2(t)} = A_m^2/2 = m_{AM}^2 A_C^2/2.$$

To po dosazení do (8.14) dá účinnost

$$\eta = \frac{m_{AM}^2}{2 + m_{AM}^2} \quad (8.15)$$

V případě 100 % modulace je účinnost 33,3 %, tj. 33,3 % výkonu slouží k přenosu informace. Při menší hloubce modulace je účinnost menší. Výkon každého postranního pásma činí nanejvýše čtvrtinu celkového výkonu. (Doporučujeme čtenáři, aby rozvážil, jak vypadá spektrum signálu amplitudově modulovaného sinusovkou a jakou amplitudu mají postranní pásma).

Z tohoto pohledu je zřejmé, že přenos využívající amplitudové modulace je velmi neefektivní. Výhodný je přenos s potlačenou nosnou vlnou, u nějž je účinnost podle (8.14) stoprocentní. Na výkonu lze ušetřit ještě tím, že budeme přenášet jen jedno ze dvou postranních pásem.

8.1.1.3 Amplitudová modulace s jedním postranním pásmem a potlačenou nosnou

a) Princip modulace

U dosud probraných amplitudových modulací se kolem nosného kmitočtu objevují dvě postranní pásma: horní a dolní. Horní odpovídá posunutému spektru (fyzikálně existujícího) modulačního signálu, dolní posunutému převrácenému spektru (obr. 8.12). Každé z pásem nese zřejmě veškerou informaci o signálu $S(t)$. Stačí tedy přenášet jen jedno z pásem. Sníží se tak jednak potřebný výkon, jednak přenos vyžaduje jen poloviční šířku pásma.

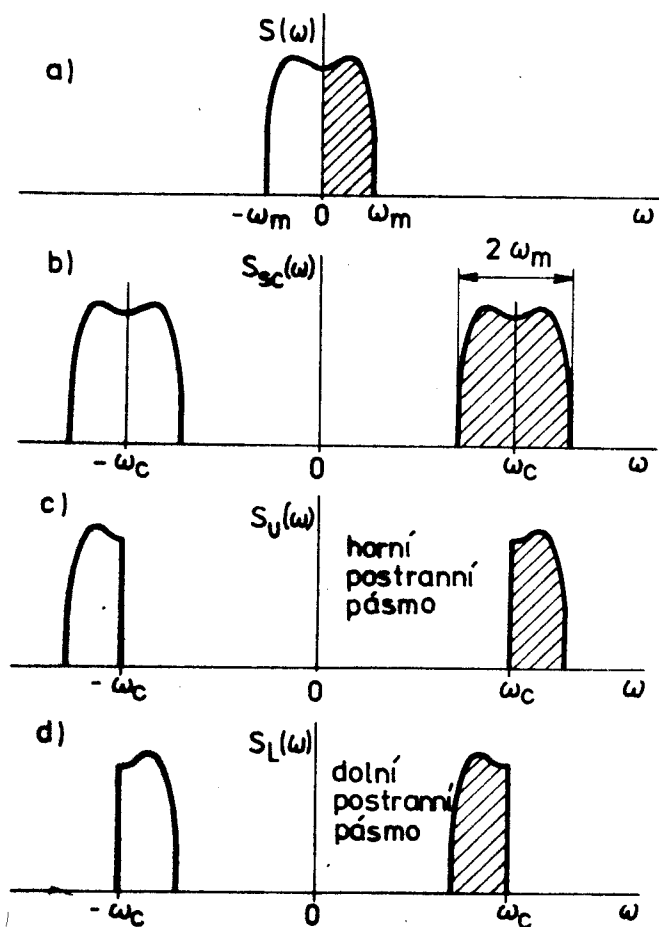
Tento způsob modulace se označuje mezinárodně vžitou zkratkou SSB (single sideband).

b) Modulační systémy SSB

Existuje několik metod SSB modulace [2], [24]. Z nich uveďme metodu

- 1) filtrační,
- 2) fázového posunu.

Filtrační metoda využívá DSB-SC modulátoru, kterým signál namodulujeme na pomocnou nosnou ω_{C1} a potlačíme nosnou vlnu. Na pomocné nosné ω_{C1} provedeme filtrem potlačení nežádáného postranního pásma. Vzhledem k nedokonalosti filtru obsahuje jednopásmový signál ještě zbytky potlačeného pásma. Proto signál modulujeme na druhou pomocnou nosnou ω_{C2} , kde provedeme další filtraci směřující k potlačení zbytků nežádáného pásma. Potom signál modulujeme na požadova-



nou nosnou ω_c . Filtrační metoda se zjednoduší, neobsahuje-li modulační signál nízkofrekvenční složky. Potom nemusí mít amplitudové charakteristika filtru příliš strmé boky.

Metoda fázového posunu nevyžaduje filtry se strmými amplitudovými charakteristikami. Princip této metody je na obr. 8.13. Představme si modulaci DSB-SC. Modulačním signálem je harmonický signál. Spektrem modulovaného signálu jsou v tomto případě dva Diracovy impulsy na kmitočtech $\omega_c \pm \omega_s$.

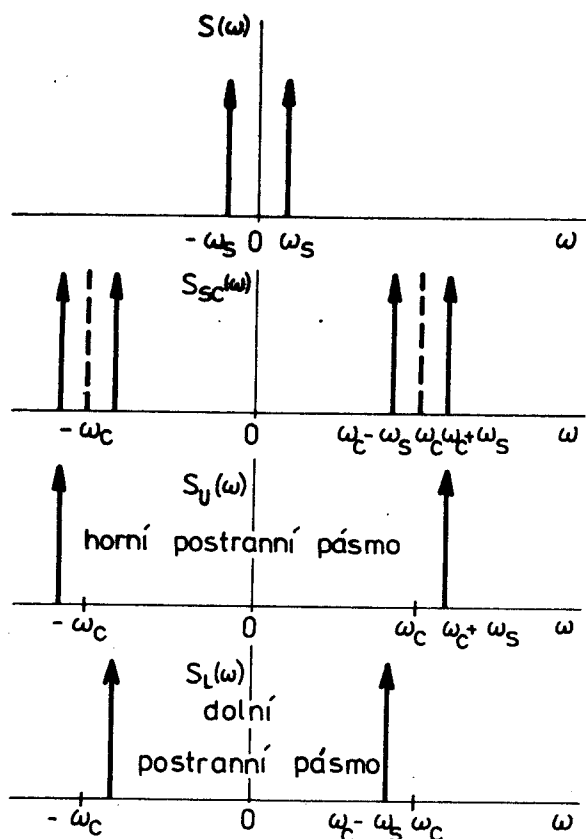
Spektrum SSB signálu představuje jen jedním z nich. Spektrem SSB signálu s dolním postranním pásmem je Diracův impuls na kmitočtu $\omega_c - \omega_s$. V časové oblasti odpovídá signálu

$$S_L(t) = \cos(\omega_c - \omega_s)t.$$

Podobně SSB signál s horním postranním pásmem lze zapísat jako

$$S_U(t) = \cos(\omega_c + \omega_s)t.$$

Můžeme tedy pro SSB modulaci harmonickým signálem psát



$$s_{SSB}(t) = \cos(\omega_c \pm \omega_s)t = \cos \omega_c t \cos \omega_s t \mp \sin \omega_c t \sin \omega_s t ; \quad (8.16)$$

horní znaménka odpovídají hornímu postrannímu pásmu, dolní dolnímu.

Pravá strana výrazu (8.16) představuje součet (rozdíl) výstupních signálů dvou vyvážených modulátorů, přičemž na jeden z nich se jak nosná, tak modulační signál přivádí s fázovým posunem $-\pi/2$. Blokové schéma modulátoru je obr. 8.14.

Nyní je nutné ověřit, zda metoda fázového posunu umožňuje získat SSB modulaci i pro obecný modulační signál [3]. Amplitudová charakteristika fázovacího členu posouvajícího fázi o $-\pi/2$ musí být jednotková v celém

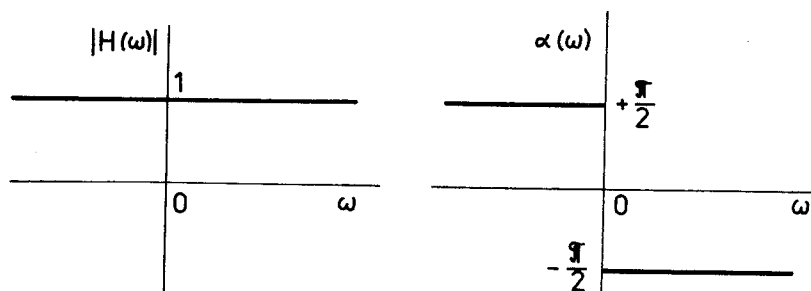
rozsahu kmitočtů. Fázová charakteristika musí mít pro $\omega > 0$ hodnoty

$\alpha(\omega) = -\pi/2$. Protože fázové spektrum je lichou funkcí kmitočtu, musí být pro $\omega < 0$, $\alpha(\omega) = +\pi/2$, tzn., že přenosová funkce musí mít průběh podle obr. 8.15 a lze pro ni psát:

$$|H(\omega)| = 1 ; \quad \alpha(\omega) = \frac{\pi}{2} - \pi \chi(\omega) ,$$

tj.

$$H(\omega) = e^{j[\pi/2 - \pi \chi(\omega)]} = j e^{-j\pi \chi(\omega)} . \quad (8.17)$$



Obr. 8.15

Jestliže $S(\omega) \longleftrightarrow S(t)$, pak signálu $s_h(t)$ za posouvačem odpovídá spektrum

$$s_h(t) \longleftrightarrow S(\omega) H(\omega) = j S(\omega) e^{-j\pi\tau(\omega)} \quad (8.17a)$$

a za vyváženým modulátorem (viz 3.15)

$$\begin{aligned} s_h(t) \cdot \sin \omega_c t &\longleftrightarrow \frac{1}{2j} [j S(\omega - \omega_c) e^{-j\pi\tau(\omega - \omega_c)} - j S(\omega + \omega_c) e^{-j\pi\tau(\omega + \omega_c)}] \\ &\longleftrightarrow -\frac{1}{2} [S(\omega + \omega_c) e^{-j\pi\tau(\omega + \omega_c)} - S(\omega - \omega_c) e^{-j\pi\tau(\omega - \omega_c)}]. \end{aligned}$$

Podle (3.16) je

$$s(t) \cos \omega_c t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [S(\omega + \omega_c) + S(\omega - \omega_c)]$$

a tedy

$$\begin{aligned} s(t) \cos \omega_c t + s_h(t) \sin \omega_c t &\longleftrightarrow \frac{1}{2} S(\omega - \omega_c) [1 + e^{-j\pi\tau(\omega - \omega_c)}] + \\ &\quad + \frac{1}{2} S(\omega + \omega_c) [1 - e^{-j\pi\tau(\omega + \omega_c)}]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Protože

$$\eta(\omega - \omega_c) = \begin{cases} 1 & ; \quad \omega > \omega_c \\ 0 & ; \quad \omega < \omega_c \end{cases}$$

je

$$1 + e^{-j\pi\tau(\omega - \omega_c)} = \begin{cases} 0 & ; \quad \omega > \omega_c \\ 2 & ; \quad \omega < \omega_c \end{cases} = 2\eta(\omega_c - \omega) \quad (8.19)$$

a podobně

$$1 - e^{-j\pi\tau(\omega + \omega_c)} = 2\eta(\omega_c + \omega) \quad (8.20)$$

Dosadíme-li (8.19) a (8.20) do (8.18), dostaneme

$$\begin{aligned} s(t) \cos \omega_c t + s_h(t) \sin \omega_c t &\longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow [S(\omega - \omega_c) \eta(\omega_c - \omega) + S(\omega + \omega_c) \eta(\omega + \omega_c)]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Výrazu (8.21) odpovídá spektrum $S_L(\omega)$ SSB modulace s dolním postranním pásmem podle obr. 8.12. Lze se přesvědčit, že změním-li znaménko ve sčítacím členu na obr. 8.14, dostaneme

$$\begin{aligned} s(t) \cos \omega_c t - s_h(t) \sin \omega_c t &\longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow [S(\omega - \omega_c) \eta(\omega - \omega_c) + S(\omega + \omega_c) \eta(-\omega - \omega_c)], \end{aligned} \quad (8.22)$$

tedy spektrum $S_U(\omega)$ SSB modulace s horním postranním pásmem.

Z uvedeného je tedy zřejmé, že obvod podle obr. 8.14 realizuje SSB modulaci. Znaménko ve sčítacím členu určuje, zda jde o modulaci s horním nebo dolním postranním pásmem.

Ukažme ještě, jaká transformace signálu odpovídá průchodu fázovacím článkem. Fázovou charakteristiku můžeme také zapsat jako

$$\alpha(\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{sign } \omega$$

a tedy

$$H(\omega) = e^{-j(\pi/2)\text{sign}(\omega)} = -j \text{sign}(\omega).$$

Potom

$$s_h(t) \longleftrightarrow S(\omega) H(\omega) = -j S(\omega) \text{sign}(\omega).$$

Podle (3.30) a (3.14)

$$\text{sign}(\omega) \longleftrightarrow \frac{j}{\pi t}$$

a tudíž podle (3.18)

$$s_h(t) = -j s(t) * \frac{j}{\pi t} = \frac{1}{\pi} s(t) * \frac{1}{t}. \quad (8.23)$$

Operace (8.23) představuje podle (3.62) Hilbertovu transformaci signálu. Signálu $s_h(t)$ se někdy říká také kvadraturní, protože (viz kap. 3) je získán posunem všech kmitočtových složek o 90° .

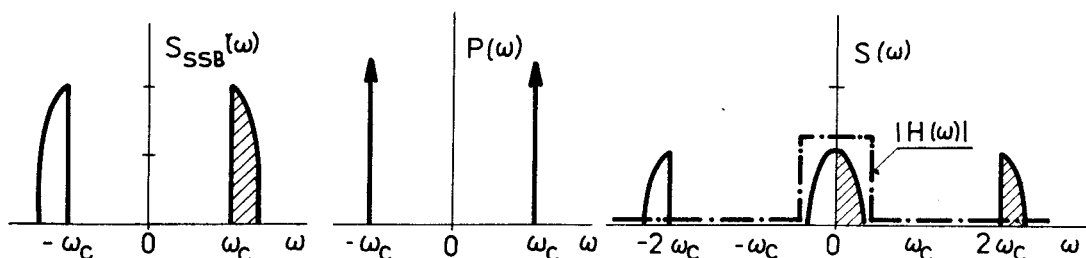
c) Demodulace SSB signálů

Pro demodulaci SSB signálů lze použít

- 1) synchronního demodulátoru,
- 2) obálkového detektoru.

Jak víme, synchronní demodulátor posouvá spektrum signálu. Můžeme ho tedy použít pro demodulaci SSB signálů. Signál na výstupu demodulátoru je

$$\begin{aligned} s_D(t) &= s_{SSB}(t) \cos \omega_c t = [s(t) \cos \omega_c t \pm s_h(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t = \\ &= s(t) \cos^2 \omega_c t \pm s_h(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t = \\ &= \frac{1}{2} s(t) + \frac{1}{2} [s(t) \cos 2\omega_c t \pm s_h(t) \sin 2\omega_c t]. \end{aligned} \quad (8.24)$$



Obr. 8.16

Proces demodulace je znázorněn na obr. 8.16. Hrenatá závorka v (8.24) představuje SSB signál na nosné $2\omega_c$, který se odstraní filtrací dolní propustí.

Synchronní demodulátor můžeme použít i v případě, že je přítomen nosný signál, který je buď přenášen nebo generován v přijímači. V tomto případě je však výhodnější použít obálkový detektor. Signál na jeho vstupu je

$$\begin{aligned} A_c \cos \omega_c t + s_{SSB}(t) &= A_c \cos \omega_c t + s(t) \cos \omega_c t \pm s_h \sin \omega_c t = \\ &= [A_c + s(t)] \cos \omega_c t + s_h(t) \sin \omega_c t = e(t) \cos[\omega_c t + \vartheta(t)], \end{aligned} \quad (8.25)$$

kde

$$e(t) = \sqrt{[A_c + s(t)]^2 + s_h^2(t)}; \quad (8.26)$$

$$\vartheta(t) = \arctg \frac{s_h(t)}{A_c + s(t)}. \quad (8.27)$$

Přivedeme-li signál (8.25) na obálkový detektor podle obr. 8.11, bude na jeho výstupu signál (8.26)

$$e(t) = \sqrt{[A_c + s(t)]^2 + s_h^2(t)} = A_c \sqrt{1 + \frac{2s(t)}{A_c} + \frac{s^2(t)}{A_c^2} + \frac{s_h^2(t)}{A_c^2}}.$$

Je-li amplituda A_c nosné dostatečně velká, tj. $|s(t)| \ll A_c$ a $|s_h(t)| \ll A_c$, můžeme zanedbat členy s vyššími mocninami A_c , odmocninu vyjádřit pomocí binomické řady, tj.

$$e(t) \approx A_c \sqrt{1 + \frac{2s(t)}{A_c}} = A_c \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2s(t)}{A_c} + \dots \right] \approx A_c + s(t) \quad (8.28)$$

a na výstupu obálkového detektoru dostáváme stejnosměrnou složku (kterou oddělíme kondenzátorem) a modulační signál.

Podobně jako u modulace DSB-SC je třeba, aby nosná generovaná v přijímači pro potřeby demodulace měla stejný kmitočet a fázi jako nosná v modulátoru. Ne-ní-li tomu tak, vzniká zkreslení. Situaci popíšeme pro synchronní demodulaci signálu SSB s dolním postranním pásmem.

Signál na výstupu demodulátoru je

$$\begin{aligned} s_D(t) &= s_{SSB}(t) \cos[(\omega_c + \Delta \omega)t + \varphi] = [s(t) \cos \omega_c t + s_h(t) \sin \omega_c t] \cdot \\ &\cdot \cos[(\omega_c + \Delta \omega)t + \varphi] = \\ &= \frac{1}{2} s(t) \{ \cos(\Delta \omega t + \varphi) + \cos[(2\omega_c + \Delta \omega)t + \varphi] \} - \\ &- \frac{1}{2} s_h(t) \{ \sin(\Delta \omega t + \varphi) - \sin[(2\omega_c + \Delta \omega)t + \varphi] \}, \end{aligned}$$

kde $\Delta \omega$ je chyba kmitočtu a φ je chyba fáze.

Složky na kmitočtu $2\omega_c + \Delta \omega$ se odfiltrují, takže

$$s_D(t) = \frac{1}{2} s(t) \cos(\Delta \omega t + \varphi) - \frac{1}{2} s_h(t) \sin(\Delta \omega t + \varphi). \quad (8.29)$$

Z výrazu (8.29) je zřejmé, že pro $\Delta\omega = \varphi = 0$ odpovídá výstupní napětí demodulátoru vztahu (8.24) a nedochází ke zkreslení.

Odchylka kmitočtu se projeví podobně jako u DSB-SC, což snadno ověříme, dosadíme-li $\varphi = 0$ v (8.29) a porovnáme s (8.5). Fázová chyba se však projeví jinak.

Předpokládejme, že $\Delta\omega = 0$, potom v (8.29)

$$s_D(t) = \frac{1}{2} [s(t) \cos \varphi - s_h(t) \sin \varphi] \quad (8.30)$$

a signál na výstupu demodulátoru obsahuje nežádoucí signál $s_h(t) \sin \varphi$ (u DSB-SC nedocházelo ke zkreslení, jen k zeslabení), který nelze odfiltrovat. Spektrum signálu na výstupu demodulátoru je

$$S_D(\omega) = \frac{1}{2} [S(\omega) \cos \varphi - S_h(\omega) \sin \varphi]$$

a dosadíme-li z (8.17a), dostaneme

$$S_D(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega) [\cos \varphi - j e^{-j\pi\eta(\omega)} \sin \varphi],$$

tj.

$$S_D(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} S(\omega) e^{-j\varphi} & ; \quad \omega > 0, \\ \frac{1}{2} S(\omega) e^{-j\varphi} & ; \quad \omega < 0, \end{cases} \quad (8.31)$$

tzn., že demodulátor posouvá všechny kmitočtové složky o φ radiánů a zavádí tak fázové zkreslení. Toto zkreslení nevadí při přenosu řeči, kdy zkresluje její jakost, ale srozumitelnost je zachována.

8.1.1.4 Amplitudová modulace s částečně potlačeným postranním pásmem

Často se vyskytují modulační signály s velkou šířkou pásma, které mají významné nízkofrekvenční složky. Jako příklad uveďme obrazový televizní signál, faksimile, rychlý přenos dat [13]. Vzhledem ke značné šířce pásma by byl výhodný přenos s SSB modulací. Ta však není, jak jsme se již zmínili, vhodná pro přenos signálů obsahujících nízké kmitočty. DSB modulace zase zabírá příliš široké pásmo. Kompromisním řešením je modulace s částečně potlačeným postranním pásmem, označovaná jako VSB (vestigial-sideband).

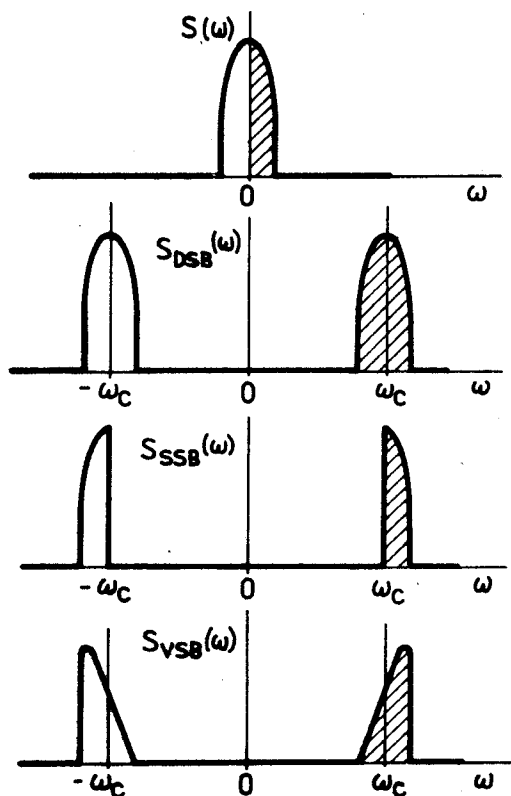
Princip modulace VSB spočívá v tom, že amplitudová charakteristika filtru potlačujícího jedno postranní pásmo není ostrá (obr. 8.17) a složky přenášeného pásma na kmitočtech v okolí nosné jsou zčásti tlumeny. Jejich útlum se kompenzuje tím, že nejsou zcela potlačeny složky nepřenášeného pásma na kmitočtech symetrických vzhledem k nosné.

VSB signály lze demodulovat pomocí synchronního demodulátoru a je-li přenášené nosné, pomocí obálkového detektoru.

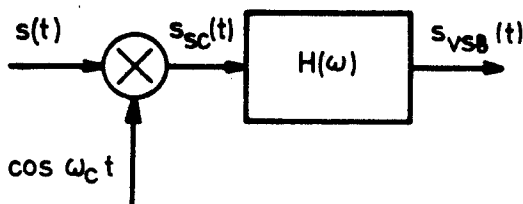
Signály VSB s potlačenou nosnou získáme filtrací signálů na výstupu vyváženého modulátoru (obr. 8.18). Hledejme nyní přenosovou charakteristiku filtru, máme-li k detekci použít synchronního demodulátoru.

Spektrum VSB signálu je

$$\begin{aligned} s_{VSB}(t) &\longleftrightarrow S_{VSB}(\omega) \\ S_{VSB}(\omega) &= \frac{1}{2} [S(\omega + \omega_c) + S(\omega - \omega_c)] H(\omega). \end{aligned} \quad (8.32)$$



Obr. 8.17



Obr. 8.18

V synchronním demodulátoru získáme signál $s_D(t)$ násobením $s_{VSB}(t)$ nosnou, tj.

$$\begin{aligned} s_D(t) &= s_{VSB}(t) \cdot \cos \omega_c t \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{2} [S_{VSB}(\omega + \omega_c) + S_{VSB}(\omega - \omega_c)]. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Do (8.33) dosadíme (8.32) a dostaneme

$$\begin{aligned} s_D(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{4} \left\{ [S(\omega + 2\omega_c) + S(\omega)] H(\omega + \omega_c) + \right. \\ &\quad \left. + [S(\omega) + S(\omega - 2\omega_c)] H(\omega - \omega_c) \right\}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Složky v okolí kmitočtu $2\omega_c$ se odfiltrují a získáme tak signál

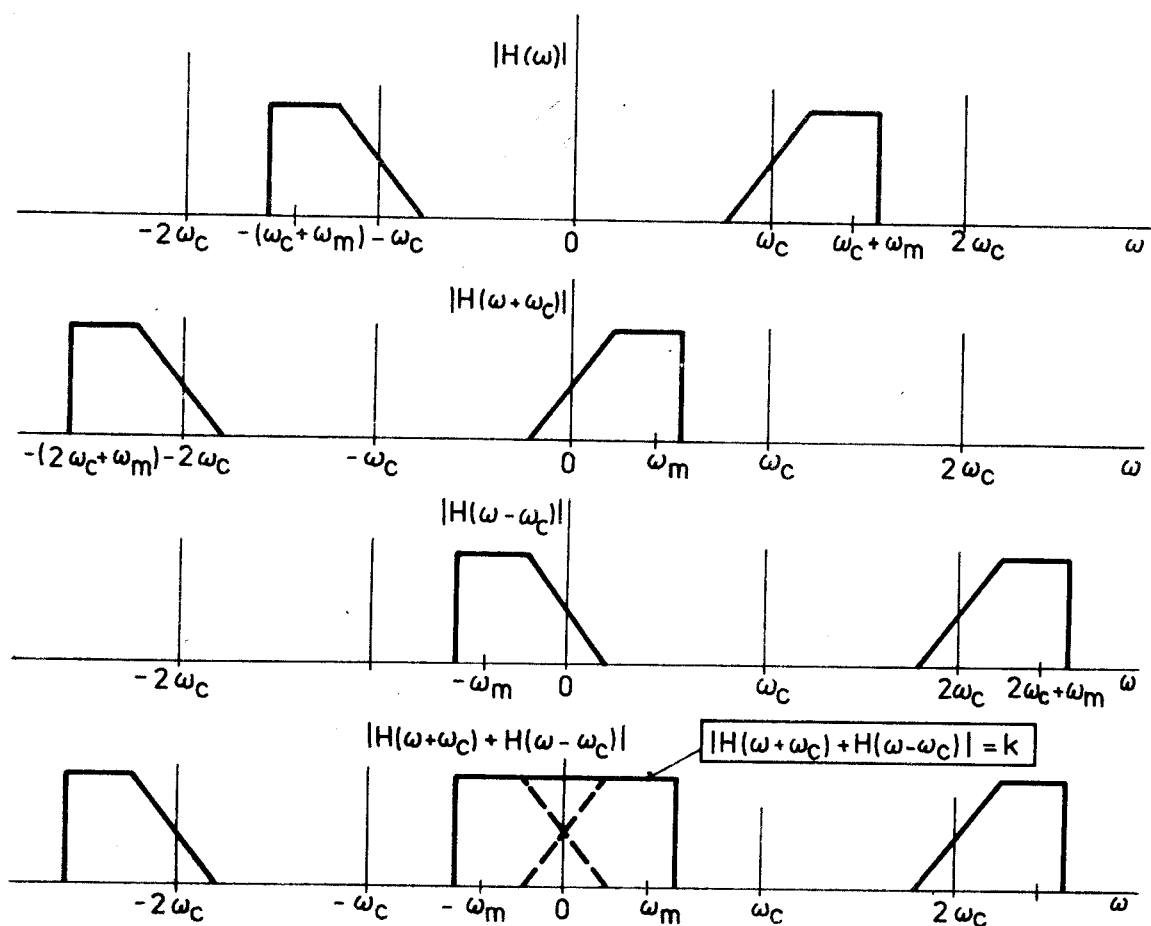
$$s_D(t) \longleftrightarrow \frac{1}{4} S(\omega) [H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)], \quad (8.35)$$

který, má-li být nezkrácený, musí odpovídat modulačnímu signálu až na konstantu, tj. $s_D(t) \longleftrightarrow k S(\omega)$. Tzn., že filtr modulátoru VSB (obr. 8.18) musí splňovat podmínku

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = k. \quad (8.36)$$

Protože spektrum $S(\omega)$ modulačního signálu je kmitočtově omezeno, tj. $S(\omega) = 0$ pro $|\omega| > \omega_m$, musí být podmínka (8.36) splněna pro $|\omega| < \omega_m$. Přitom $H(\omega \pm \omega_c)$ jsou kmitočtově posunuté přenosové charakteristiky (obr. 8.19). Podmínka (8.36) bude splněna, když přenosová charakteristika bude v okolí nosné symetrická vzhledem k bodu, v němž prochází kmitočtem nosné (obr. 8.20).

Modulace VSB má šířku pásma téměř jako SSB a získává se z DSB poměrně snadnou filtrací. VSB signál lze demodulovat synchronním i obávkovým detektorem.



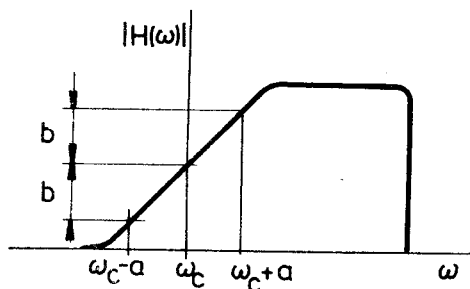
Obr. 8.19

8.1.1.5 Šumové poměry u amplitudové modulace

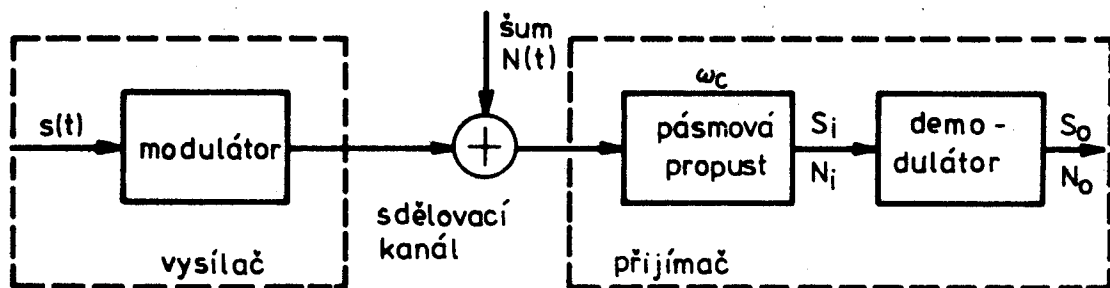
U různých druhů modulace je různý odstup signálu od šumu. Všimněme si, jaké místo z hlediska šumu má modulátor a demodulátor v radio-technické soustavě (obr. 8.21).

Vstupní díly přijímače (počítaje v to např. i mezifrekvenční stupeň) představují ve většině případů úzkopásmovou

propust, symetricky laděnou kolem nosného úhlového kmitočtu ω_c . Jí prochází jednak užitečný modulovaný signál, jednak rušivý šumový signál $N(t)$. Předpokládáme, že šum má normální rozložení a že je aditivní, tj. že se s modulovaným signálem sečítá. Potom máme na vstupu demodulátoru úzkopásmový náhodný proces, kterým jsme se zabývali v kapitolách 6 a 7. Výkon užitečného signálu na vstupu demodulátoru je S_i , šumu N_i . Výkony na výstupu demodulátoru jsou S_0, N_0 . Výkonem šumu rozumíme jeho rozptyl, jak jsme uvedli v kap. 6.3.2. Odstupem



Obr. 8.20



Obr. 8.21

signálu od šumu pak rozumíme poměry výkonů (S_i/N_i) a (S_o/N_o).

a) Modulace DSB-SC

Schema demodulátoru je na obr. 8.5. Připomeňme, že jeho součástí je dolní propust. Budeme-li předpokládat, že amplituda nosné vlny je $A_c = 1$, je střední výkon signálu

$$S_i = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [s(t) \cos \omega_c t]^2 dt = \overbrace{[s(t) \cos \omega_c t]^2}^{1/2} = \frac{1}{2} \widetilde{s^2(t)}. \quad (8.37)$$

Signál na výstupu demodulátoru je podle (8.3) $(1/2) s(t)$ a tedy jeho střední výkon

$$S_o = \left[\frac{1}{2} \widetilde{s(t)} \right]^2 = \frac{1}{4} \widetilde{s^2(t)} = \frac{1}{2} S_i. \quad (8.38)$$

Šum na vstupu demodulátoru je podle (7.39) úzkopásmový normální náhodný proces

$$N_i(t) = A(t) \cos \omega_c t + C(t) \sin \omega_c t \quad (8.39)$$

a za jeho výkon považujeme

$$N_i = D[N_i(t)]. \quad (8.40)$$

Po násobení nosnou v demodulátoru dostáváme náhodný proces

$$\begin{aligned} N_x(t) &= N_i(t) \cos \omega_c t = A(t) \cos^2 \omega_c t + C(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t = \\ &= \frac{1}{2} [A(t) + A(t) \cos 2\omega_c t + C(t) \sin 2\omega_c t]. \end{aligned}$$

Dolní propustí se potlačí složky na kmitočtu $2\omega_c$ a šum na výstupu demodulátoru je

$$N_o(t) = \frac{1}{2} A(t) \quad (8.41)$$

a jeho výkon je

$$N_o = D[N_o(t)] = D\left[\frac{1}{2} A(t)\right] = \frac{1}{4} D[A(t)]. \quad (8.42)$$

Podle kapitoly 7.3.1.2 víme, že $D[A(t)] = D[N_i(t)]$
a tudíž

$$N_o = \frac{1}{4} N_i . \quad (8.43)$$

Potom

$$\boxed{\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{2(S_i/N_i)}{S_i/N_i} = 2} . \quad (8.44)$$

Z uvedeného vyplývá, že v synchronním detektoru při demodulaci DSB-SC dochází ke dvojnásobnému zlepšení odstupu signálu od šumu. To lze vysvětlit tím, že úzkopásmový šum (8.39) má sinusovou a kosinusovou (kvadraturní) složku. Obě se násobí $\cos \omega_c t$, čímž se spektrum sinusové složky přenesse na kmitočet $2\omega_c$ a je odfiltrováno dolní propustí. Odfiltruje se tak polovina šumového výkonu a odstup signálu od šumu se tím dvakrát zlepší.

b) Modulace SSB-SC

Signál SSB vznikne posunem spektra modulačního signálu na kmitočet ω_c (viz obr. 8.12, příp. výrazy (8.21) a (8.22)), přičemž se velikost spektrálních složek nezmění.

Výkon signálu je úměrný ploše spekter a z obr. 8.12 je zřejmé, že střední výkon signálu na vstupu demodulátoru je roven střednímu výkonu modulačního signálu

$$S_i = \overline{s^2(t)} . \quad (8.45)$$

Podle (8.24) je signál na výstupu demodulátoru $(1/2) s(t)$ a tudíž jeho střední výkon je

$$S_o = \overline{\left[\frac{1}{2} s(t)\right]^2} = \frac{1}{4} \overline{s^2(t)} = \frac{1}{4} S_i ,$$

a tedy

$$S_o/S_i = \frac{1}{4} . \quad (8.46)$$

Máme-li určit výkon šumu, všimneme si, že synchronní detektory pro DSB i SSB jsou stejné, v obou případech na jejich vstup přichází úzkopásmový náhodný proces (8.39), který se násobí nosnou $\cos \omega_c t$ a pak filtruje, aby se odstranily složky v okolí kmitočtu $\pm 2\omega_c$. Proto platí u SSB (8.43) a

$$N_o/N_i = \frac{1}{4} . \quad (8.47)$$

Z uvedeného plyne, že u SSB-SC nedochází ke zlepšení výkonového odstupu signálu od šumu

$$\boxed{\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 1} . \quad (8.48)$$

Srovnáme-li výrazy (8.44) a (8.48), zdá se na první pohled, že z hlediska zlepšení odstupu signálu od šumu je modulace DSB výhodnější než SSB. Avšak není tomu tak, protože DSB signál zaujímá dvojnásobnou šířku pásma než SSB a tedy i výkon N_i šumu je u DSB dvojnásobný. Dvojnásobné zlepšení odstupu signálu od šumu u DSB se tedy anulují dvojnásobným vstupním šumovým výkonem. Modulace DSB-SC a SSB-SC mají tedy stejnou odolnost vůči šumu.

c) Amplitudová modulace s nosnou

Signál na vstupu demodulátoru je (viz (8.6))

$$s_{AM}(t) = [A_C + s(t)] \cos \omega_C t$$

a jeho střední výkon je (viz (8.13))

$$S_i = \overline{s_{AM}^2(t)} = \frac{1}{2} [A_C^2 + \overline{s^2(t)}] . \quad (8.49)$$

Výkon vstupního šumu je

$$N_i = D[N_i(t)] .$$

Pro určení výkonů na výstupu hledáme obálku a fázi náhodného procesu na vstupu demodulátoru

$$\begin{aligned} & [A_C + s(t)] \cos \omega_C t + A(t) \cos \omega_C t + C(t) \sin \omega_C t = \\ & = [A_C + s(t) + A(t)] \cos \omega_C t + C(t) \sin \omega_C t = \\ & = E(t) \cos[\omega_C t + \theta(t)] , \end{aligned} \quad (8.50)$$

a tedy obálka vstupního signálu demodulátoru je

$$E(t) = \sqrt{[A_C + s(t) + A(t)]^2 + C^2(t)} \quad (8.51)$$

a fáze

$$\theta(t) = \arctg \frac{C(t)}{A_C + s(t) + A(t)} . \quad (8.52)$$

Další vyšetřování šumových poměrů amplitudové modulace s nosnou vlnou rozdělíme na dva případy:

- 1) šum je malý, tj. $A_C + s(t) \gg N(t)$,
- 2) šum je velký, tj. $N(t) \gg A_C + s(t)$.

1) Malý šum. V tomto případě $A_C + s(t) \gg A(t)$, $A_C + s(t) \gg C(t)$ a pro signál (8.51) na výstupu obálkového detektoru můžeme psát

$$\begin{aligned} E(t) & \doteq \sqrt{[A_C + s(t)]^2 + 2[A_C + s(t)]A(t)} = [A_C + s(t)] \sqrt{1 + \frac{2A(t)}{A_C + s(t)}} \doteq \\ & \doteq [A_C + s(t)] \left[1 + \frac{A(t)}{A_C + s(t)} \right] = A_C + s(t) + A(t) . \end{aligned}$$

Užitečný signál na výstupu demodulátoru má střední výkon

$$S_o = \overline{s^2(t)} , \quad (8.53)$$

šum

$$N_o = D[A(t)] = D[N_i(t)] = N_i . \quad (8.54)$$

Z výrazů (8.49), (8.53) a (8.54) dostaneme

$$\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{\widetilde{s^2(t)} / N_i}{\frac{1}{2} [A_c^2 + \widetilde{s^2(t)}] / N_i} = \frac{2 \widetilde{s^2(t)}}{A_c^2 + \widetilde{s^2(t)}} \quad (8.55)$$

Je zřejmé, že odstup signálu od šumu se zlepšuje se zmenšováním amplitudy nosné A_c . Výraz (8.55) má největší hodnotu při 100 % modulaci.

Ve speciálním případě, je-li $s(t)$ harmonický signál a je-li činitel hloubky modulační $m_{AM} = 1$, je

$$\widetilde{s^2(t)} = [A_c \cos \omega_m t]^2 = \frac{A_c^2}{2}$$

a potom

$$\boxed{\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{A_c^2}{A_c^2 + \frac{A_c^2}{2}} = \frac{2}{3}} \quad (8.56)$$

Z uvedeného plyne, že největší možné zlepšení odstupů signálu od šumu je 2/3.

2) Silný šum. V tomto případě je $A(t), C(t) \gg A_c + s(t)$. Potom (8.51) můžeme přepsat

$$\begin{aligned} E(t) &\doteq \sqrt{A^2(t) + C^2(t) + 2 A(t) [A_c + s(t)]} = \\ &= \sqrt{A^2(t) + C^2(t)} \cdot \sqrt{1 + 2 [A_c + s(t)] \cdot \frac{A(t)}{A^2(t) + C^2(t)}} = \\ &= R(t) \cdot \sqrt{1 + 2 \frac{A_c + s(t)}{R(t)} \cos \phi(t)} \end{aligned} \quad (8.57)$$

kde $R(t)$ a $\phi(t)$ jsou obálka a fáze procesu $N_i(t)$ na vstupu. Protože $R(t) \gg A_c + s(t)$ lze dále psát

$$\begin{aligned} E(t) &\doteq R(t) \left[1 + \frac{A_c + s(t)}{R(t)} \cos \phi(t) \right] = \\ &= R(t) + [A_c + s(t)] \cos \phi(t). \end{aligned} \quad (8.58)$$

Z výrazu (8.58) je zřejmé, že na výstupu obálkového detektoru nelze získat šumem neovlivněný signál $s(t)$, pouze signál $s(t) \cos \phi(t)$, jehož úroveň kolísá podle náhodné fáze normálního náhodného procesu.

Z uvedeného je patrné, že v případě velkého šumu obálkový detektor zcela potlačí užitečný signál. Vzniká tzv. prahový jev. Prahem rozumíme hodnotu odstupů signálu od šumu na vstupu $(S_i/N_i)_T$. Snižujeme-li (S_i/N_i) pod $(S_i/N_i)_T$, klesá výstupní odstup (S_0/N_0) rychleji než vstupní.

Použijme nyní pro demodulaci amplitudově modulovaného signálu s nosnou synchronního detektoru. Vstupní odstup signálu od šumu je, jak jsme uvedli výše,

$$S_i/N_i = \frac{A_c^2 + \widetilde{s^2(t)}}{2 N_i}$$

Po násobení nosnou v demodulátoru dostaneme signál (viz (8.50))

$$\{ [A_c + s(t)] \cos \omega_c t + A(t) \cos \omega_c t + C(t) \sin \omega_c t \} \cos \omega_c t = \\ = \frac{1}{2} [A_c + s(t) + A(t)] + \frac{1}{2} [A_c + s(t) + A(t)] \cos 2 \omega_c t + \frac{1}{2} C(t) \sin 2 \omega_c t$$

a z něho po filtraci dolní propustí signál na výstupu demodulátoru (náhodný proces)

$$N_0(t) = \frac{1}{2} [A_c + s(t) + A(t)] . \quad (8.59)$$

Užitečný signál v $N_0(t)$ je $(1/2) s(t)$, šum $(1/2) A(t)$.

Jejich střední výkon jsou

$$S_0 = \overline{\left[\frac{1}{2} s(t) \right]^2} = \frac{1}{4} \overline{s^2(t)} , \quad (8.60)$$

$$N_0 = D \left[\frac{1}{2} A(t) \right] = \frac{1}{4} D [N_i(t)] = \frac{1}{4} N_i . \quad (8.61)$$

Potom výstupní odstup signálu od šumu u synchronní detekce amplitudově modulovaného signálu je

$$S_0 / N_0 = \frac{\overline{s^2(t)}}{N_i} \quad (8.62)$$

Bez ohledu na úroveň šumu.

Zlepšení odstup signálu od šumu je při použití synchronního detektoru pro demodulaci amplitudově modulovaného signálu s nosnou

$$\boxed{\frac{S_0 / N_0}{S_i / N_i} = \frac{2 \overline{s^2(t)}}{A_c^2 + \overline{s^2(t)}}} \quad (8.63)$$

tj. stejně jako u obálkového detektoru při malém šumu. Zdůrazňujeme, že výraz (8.63) je odvozen aniž by bylo nutné brát v úvahu úroveň šumu. Z toho vyplývá, že pro vyšší hodnoty šumu je výhodnější použití synchronního detektoru, u něhož nenastává prahový jev.

8.1.2 Úhlová modulace

Harmonický signál je, stroze vzato, periodický sinusový signál s konstantní amplitudou a s konstantním kmitočtem. Přitom jsme na začátku kapitoly uvedli, že modulace spočívá v řízených změnách těchto veličin. Řízením amplitudy jsme se zabývali v předcházejícím oddíle. Nyní se budeme zabývat modulacemi, jimiž ovládáme kmitočet a fázi. Musíme však, z důvodů uvedených výše, zavést obecnější harmonický signál

$$s(t) = A \cos \vartheta(t) , \quad (8.64)$$

u něhož je fáze funkcí času.

U signálu se stálým kmitočtem

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi_0)$$

je fáze

$$\varphi(t) = \omega_c t + \varphi_0 \quad (8.65)$$

a kmitočet můžeme určit jako její derivaci

$$\omega_c = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (8.66)$$

U úhlově modulovaného signálu řídíme fázi $\varphi(t)$ modulačním signálem $s(t)$. Její derivace nemusí být konstantní. Derivace fáze představuje okamžitý kmitočet

$$\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (8.67)$$

Fázi můžeme naopak vyjádřit pomocí okamžitého kmitočtu

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \omega_i dt \quad (8.68)$$

Úhlově modulovaný signál (8.64) si můžeme představit jako průmět rotujícího vektoru

$$A e^{j\varphi(t)}$$

na reálnou osu. Úhlovou modulací měníme polohu vektoru na kružnici. Není-li přítomen modulační signál, je vysílán jen signál nosný, kterému odpovídá rovnoměrné otáčení vektoru. Budeme-li nosný signál úhlově modulovat, bude se vektor zpoko-
vat nebo předbíhat. Z toho je zřejmé, že fáze

$$\varphi(t) = \omega_c t + \Theta(t) \quad (8.69)$$

musí mít dvě složky:

- 1) složku $\omega_c t$, která je určena fází nosné,
- 2) okamžitou fázovou odchylku $\Theta(t)$ od fáze nosné.

Fázová odchylka závisí na modulačním signálu. Podobně na něm závisí okamžitý úhlový kmitočet (8.67)

$$\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_c + \frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega_c + \Omega(t), \quad (8.70)$$

který se v každém okamžiku liší od kmitočtu nosné o okamžitou kmitočtovou odchylku

$$\Omega(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} \quad (8.71)$$

Okamžitá fázová odchylka se dá vyjádřit pomocí okamžité kmitočtové odchylky

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \Omega(t) dt \quad (8.72)$$

Při úhlové modulaci můžeme modulačním signálem měnit fázi $\varphi(t)$ tím, že přímo ovládáme buď okamžitou

- 1) fázovou odchylku $\Theta(t)$, pak mluvíme o fázové modulaci (PM - z anglického phase modulation), nebo
- 2) kmitočtovou odchylku $\Omega(t)$, pak mluvíme o kmitočtové modulaci (FM - frequency modulation).

- 1) U fázové modulace je okamžitá fázová odchylka úměrná okamžité hodnotě modulačního signálu

$$\Theta(t) = k_P s(t). \quad (8.72)$$

Konstanta k_P je činitel úměrnosti; někdy se nazývá index fázové modulace [24], [25], [2]. Pro fázově modulovaný signál můžeme tedy psát

$$s_{PM}(t) = A_C \cos[\omega_C t + k_P s(t)] \quad (8.73)$$

Při fázové modulaci se mění okamžitý kmitočet modulovaného signálu

$$\omega_{iPM} = \omega_C + k_P \frac{d s(t)}{dt} \quad (8.74)$$

tzn., že okamžitá kmitočtová odchylka je

$$\Omega_{PM}(t) = k_P \frac{d s(t)}{dt} \quad (8.75)$$

Modulovaný signál je často výhodné vyjádřit v komplexním tvaru

$$\dot{s}_{PM}(t) = A_C e^{j[\omega_C t + k_P s(t)]} \quad (8.76)$$

- 2) U kmitočtové modulace je modulačním signálem přímo řízena okamžitá kmitočtová odchylka

$$\Omega_{FM}(t) = k_f s(t), \quad (8.77)$$

kde k_f je činitel úměrnosti. Abychom mohli vyjádřit časový průběh FM signálu, musíme vyjádřit okamžitou fázovou odchylku (8.72). Předpokládejme, že signál byl připojen v čase $t = 0$, tj.

$$\Theta_{FM}(t) = \int_0^t \Omega_{FM}(t) dt = k_f \int_0^t s(t) dt \quad (8.78)$$

a dosadíme do (8.64), (8.69). Potom průběh FM signálu je

$$s_{FM}(t) = A_C \cos \left[\omega_C t + k_f \int_0^t s(t) dt \right] \quad (8.79)$$

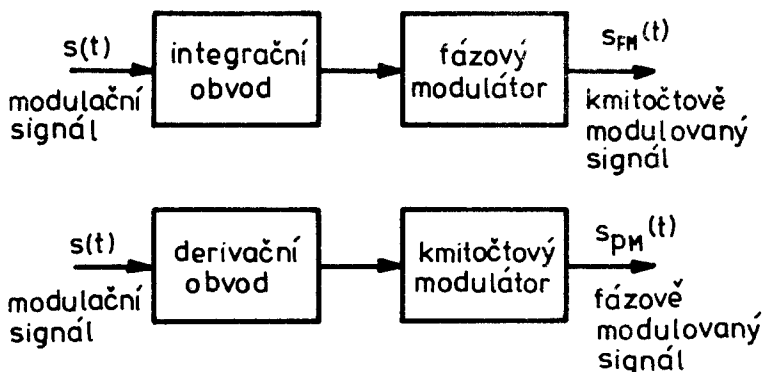
a okamžitý kmitočet FM signálu se mění podle modulačního signálu kolem kmitočtu nosné ω_C

$$\omega_{iFM} = \omega_C + k_f s(t). \quad (8.80)$$

FM signál můžeme také zapsat v komplexním tvaru

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_C e^{j[\omega_C t + k_f \int_0^t s(t) dt]} \quad (8.81)$$

Z uvedeného je zřejmé, že FM i PM spolu těsně souvisí. U fázové modulace nastává změna kmitočtu, u kmitočtové modulace dochází ke změně fáze. Budeme-li modulační signál integrovat a výsledek integrace použijeme jako modulační signál pro PM, dostaneme signál kmitočtově modulovaný. Naopak budeme-li modulační signál derivovat a výsledek použijeme jako modulační signál pro FM, dostaneme fázově modulovaný signál (obr. 8.22). Toho často využíváme v praxi. Rozdíl mezi FM a PM je zřejmý z obr. 8.23 [67].



Obr.8.22

Porovnejme ještě obě modulace při harmonickém modulačním signálu

$$s(t) = A_m \cos \omega_m t .$$

- 1) U fázové modulace je okamžitá fázová odchylka

$$\Theta_{PM}(t) = k_p A_m \cos \omega_m t = \Delta \Theta_{PM} \cos \omega_m t . \quad (8.82)$$

Veličinu $\Delta \Theta_{PM}$ nazýváme fázový zdvih. Udává největší možnou změnu fáze při modulaci harmonickým signálem. Závisí na amplitudě modulačního napětí.

Okamžitý kmitočet je

$$\omega_{iPM} = \omega_c - k_p A_m \omega_m \sin \omega_m t = \omega_c - \Delta \Omega_{PM} \sin \omega_m t ,$$

kde

$$\Delta \Omega_{PM} = k_p A_m \omega_m = \Delta \Theta_{PM} \omega_m \quad (8.83)$$

je kmitočtový zdvih PM a udává největší odchylku okamžitého úhlového kmitočtu od kmitočtu nosné.

- 2) U kmitočtové modulace je při modulaci harmonickým signálem okamžitá kmitočtová odchylka

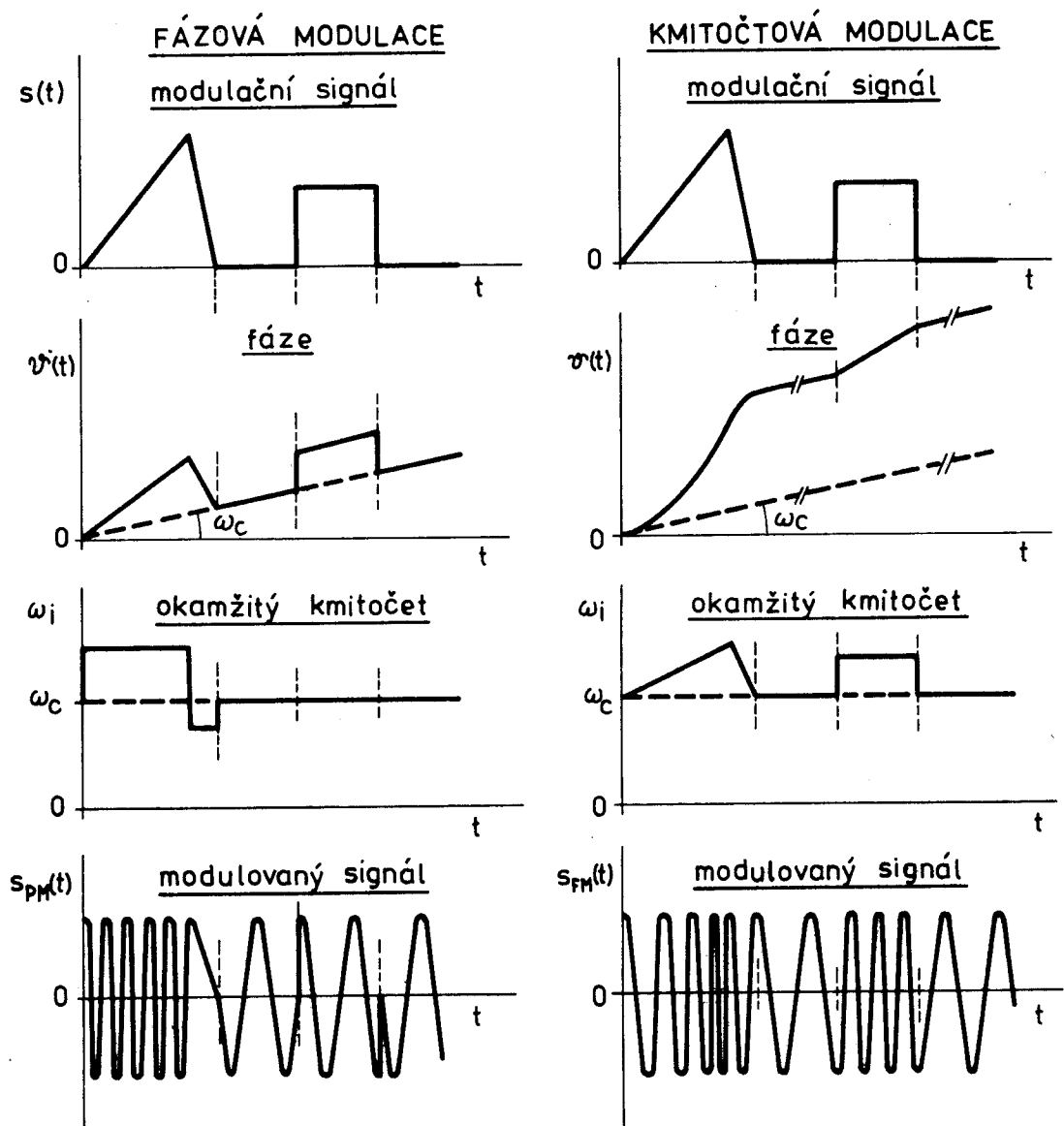
$$\Omega_{FM}(t) = k_f A_m \cos \omega_m t = \Delta \Omega_{FM} \cos \omega_m t .$$

Kmitočtový zdvih

$$\Delta \Omega_{FM} = k_f A_m \quad (8.84)$$

závisí jen na amplitudě modulačního signálu.

Okamžitá fázová odchylka je



Obr. 8.23

$$\theta_{FM}(t) = \frac{k_f A_m}{\omega_m} \sin \omega_m t = \beta \sin \omega_m t, \quad (8.85)$$

kde

$$\beta = \frac{k_f A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta \Omega_{FM}}{\omega_m} \quad (8.86)$$

je tzv. index kmitočtové modulace (a také fázový zdvih FM - srovnej (8.85) s (8.82)).

Dále se budeme zabývat především FM, protože všechna tvrzení jsou (viz obr. 8.22) platná i pro PM.

8.1.2.1 Kmitočtová modulace harmonickým signálem

Analyzujeme spektrum FM signálu. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že modulační signál $A_m \cos \omega_m t$ je harmonický, připojený v čase $t = 0$. Výraz (8.85) dosadíme do (8.81) a dostaneme FM signál vyjádřený v komplexním tvaru

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_C e^{j[\omega_c t + \beta \sin \omega_m t]} \quad (8.87)$$

Připomeňme, že index kmitočtové modulace

$$\beta = \frac{k_f A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta \Omega_{FM}}{\omega_m}.$$

Výraz (8.87) můžeme přepsat

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_C e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{j\omega_c t} \quad (8.88)$$

kde prvá exponenciála je periodická funkce času s periodou $2\pi/\omega_m$ a můžeme ji vyjádřit pomocí Fourierovy řady

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_m t} \quad (8.89)$$

s koeficienty

$$c_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} e^{j\beta \sin \omega_m t} \cdot e^{-jn\omega_m t} dt,$$

které po substituci $\omega_m t = x$ jsou

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx = J_n(\beta), \quad (8.90)$$

kde $J_n(\beta)$ je Besselova funkce prvního druhu řádu n . Potom (8.88) můžeme přepsat

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_C e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t}. \quad (8.91)$$

Protože

$$J_n(\beta) = J_n(\beta) \quad \text{pro } n \text{ sudé,}$$

$$J_n(\beta) = -J_n(\beta) \quad \text{pro } n \text{ liché}$$

a

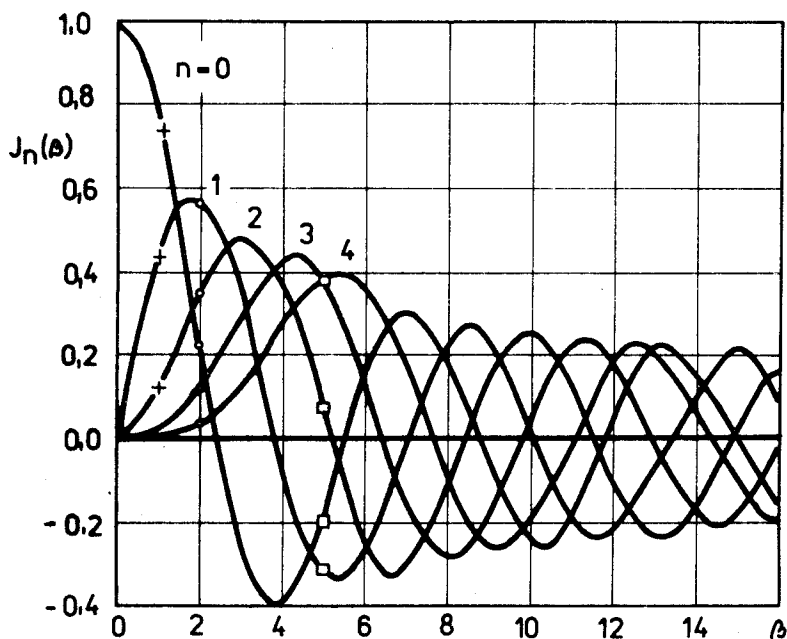
$$s_{FM}(t) = \operatorname{Re} [\dot{s}_{FM}(t)]$$

je FM signál při modulaci harmonickým signálem

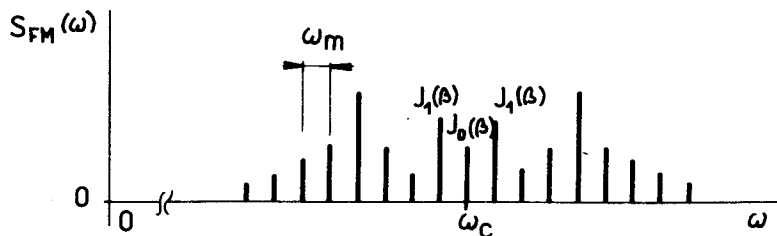
$$s_{FM}(t) = A_c \left\{ J_0(\beta) \cos \omega_c t + \right. \\ + J_1(\beta) [\cos(\omega_c + \omega_m)t - \cos(\omega_c - \omega_m)t] + \\ + J_2(\beta) [\cos(\omega_c + 2\omega_m)t + \cos(\omega_c - 2\omega_m)t] + \\ + J_3(\beta) [\cos(\omega_c + 3\omega_m)t - \cos(\omega_c - 3\omega_m)t] + \\ + \dots + \dots + \\ \left. + \dots \right\}$$

(8.92)

Průběh Besselových funkcí několika prvních řádů v závislosti na argumentu β je na obr. 8.24. Z výrazu (8.92) je zřejmé, že FM modulací harmonickým sig-



Obr. 8.24

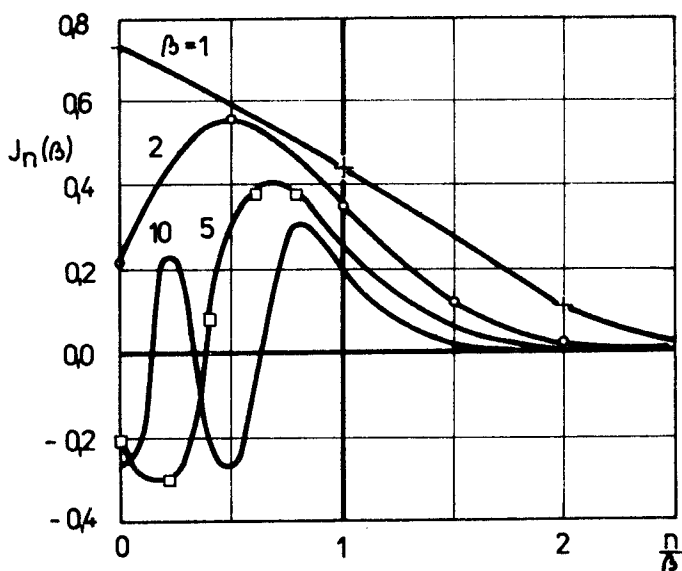


Obr. 8.25

nálem dostáváme čárové spektrum. Složky spektra - postranní pásma - jsou symetricky rozložené kolem kmitočtu nosné a jejich velikost se řídí hodnotami Besselových funkcí (obr. 8.25 - pro jednoduchost je uvedeno jednostranné spektrum). Jsou od sebe vzdáleny o modulační kmitočet ω_m . Při určitých hodnotách indexu modulace některé složky spektra vymizí (a to i nosná pro $\beta \doteq 2, 4, \beta \doteq 5,5, \dots$). Teoreticky má spektrum nekonečně mnoho složek. Prakticky však je velikost vyšších složek malá a

šířku spektra můžeme považovat za konečnou.

Abychom mohli posoudit potřebnou šířku pásma pro FM, všimněme si, jak



Obr. 8.26

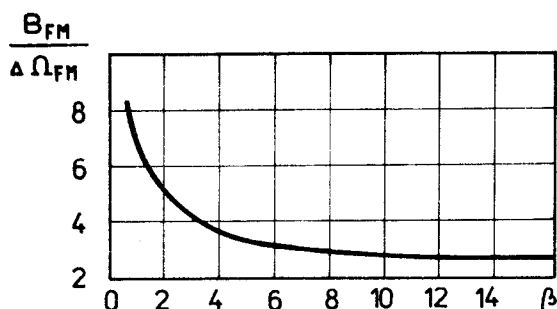
závisí velikost postranních pásem na řádu n a indexu modulace β . Obr. 8.24 překresleme tak, že budeme vynášet hodnoty $J_n(\beta)$ v závislosti na poměru n/β — přičemž β bude parametrem křivek (obr. 8.26). Z obrázku je zřejmé, že pro $n/\beta > 1$ se s růstem n postranní pásma monotónně zmenšují. Pro konstantní n/β velikost postranních pásem s růstem β klesá. Pro velké hodnoty β , kdy můžeme zanedbat postranní pásma řádu vyššího než $n = \beta$, je potřebná šířka pásma pro přenos (viz (8.86))

přibližně

$$B_{FM} = 2n\omega_m = 2\beta\omega_m = 2\Delta\Omega_{FM},$$

(8.93)

tj. dvojnásobek kmitočtového zdvihu. Při přesném rozboru samozřejmě záleží na tom, jak velké hodnoty spektrálních složek považujeme za zanedbatelné. Často považujeme za zanedbatelná postranní pásma, jejichž velikost je menší než 1 % nedomulované nosné, tedy pásma, pro která $J_n(\beta) < 0,01$. Závislost šířky pásma na indexu modulace je pro tento případ na obr. 8.27 [3].



Obr. 8.27

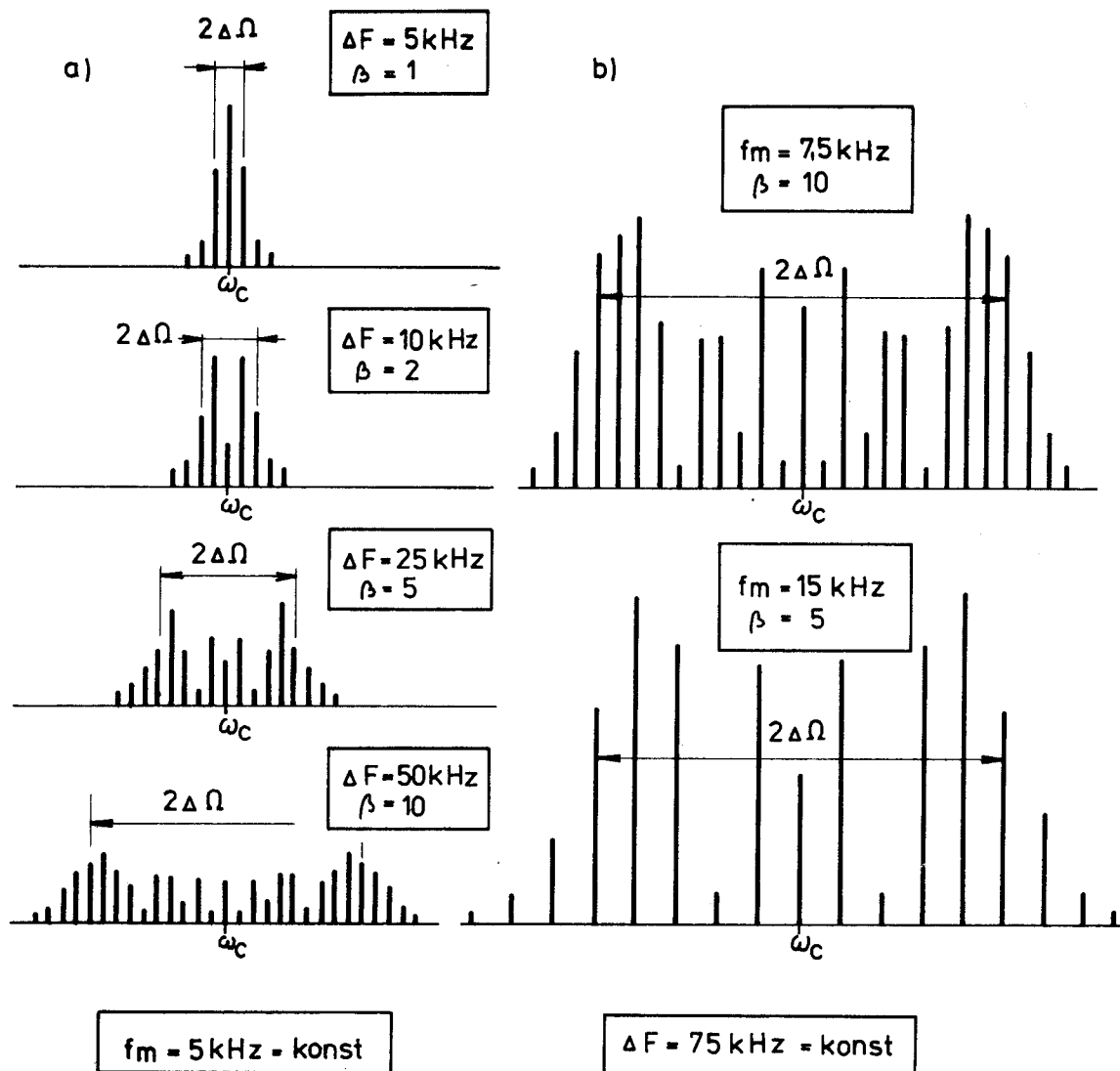
signálu a měníme jeho kmitočet. Z obrázku je dobře patrná souvislost šířky pásma s kmitočtovým zdvihem a indexem modulace.

Vraťme se nyní k obr. 8.24. Je z něj zřejmé, že pro malé hodnoty β budou

Velikost postranních pásem závisí jak na amplitudě modulačního signálu, tak na jeho kmitočtu, jak je znázorněno na obr. 8.28 [3].

V obr. 8.28a je kmitočet modulačního signálu konstantní a zvětšuje se kmitočtový zdvih, tj. roste index β — to odpovídá zvětšování amplitudy modulačního signálu.

Na obr. 8.28b udržujeme konstantní amplitudu modulačního



$$\Delta F = \frac{\Delta \Omega_{FM}}{2\pi}$$

$$\beta = \frac{\Delta \Omega_{FM}}{\omega_m} = \frac{\Delta F}{f_m}$$

Obr. 8.28

postranní pásma FM signálu malá. To je zřejmé také z přibližného vyjádření Besselových funkcí pro argument $\beta \ll 1$

$$\left. \begin{aligned} J_0(\beta) &\doteq 1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \\ J_n(\beta) &\doteq \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n, \quad n \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

Pro velmi malé hodnoty indexu modulační je FM signál tvořen nosnou vlnou a dvěma postranními pásmy - vyšší postranní pásma můžeme zanedbat. Tuto modulaci nazýváme úzkopásmová kmitočtová modulace - její spektrum se podobá AM.

Všimněme si ještě středního výkonu FM signálu. Podle Parsevalovy věty je

$$P = \frac{A_C^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) .$$

Protože platí $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) = 1$, je střední výkon FM signálu roven výkonu nemodulované nosné a je tedy stálý.

8.1.2.2 Kmitočtové modulace několika harmonickými signály

Uvažujme nejprve případ dvou harmonických signálů, tj. modulační signál je

$$s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t ,$$

okamžitý kmitočet

$$\omega_i = \omega_c + k_f s(t) = \omega_c + k_f (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) ,$$

kmitočtový zdvih

$$\Delta \Omega = k_f (A_1 + A_2)$$

a fáze

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t \omega_i dt = \omega_c t + \frac{A_1 k_f}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{A_2 k_f}{\omega_2} \sin \omega_2 t = \\ &= \omega_c t + \beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t , \end{aligned}$$

(8.95)

kde indexy modulace

$$\beta_1 = \frac{A_1 k_f}{\omega_1} ; \quad \beta_2 = \frac{A_2 k_f}{\omega_2} .$$

Výraz (8.95) dosadíme do (8.81) a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{s}_{FM}(t) &= A_C e^{j[\omega_c t + \beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t]} = \\ &= A_C e^{j\omega_c t} e^{j\beta_1 \sin \omega_1 t} e^{j\beta_2 \sin \omega_2 t} . \end{aligned}$$

Exponenciály vyjádříme pomocí Fourierovy řady a dostaneme

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) e^{j(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t} .$$

Z toho

$$s_{FM}(t) = A_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t$$

a je zřejmé, že spektrum obsahuje postranní pásma na kmitočtech $(\omega_c \pm n\omega_1)$ $(\omega_c \pm m\omega_2)$ a na kombinačních kmitočtech $(\omega_c \pm n\omega_1 \pm m\omega_2)$.

Z tohoto důvodu se FM označuje jako nelineární modulace (srovnejte s odst. 7.2).

Výsledek lze snadno zobecnit na více harmonických signálů.

8.1.2.3 Kmitočtová modulace periodickým obdélníkovým signálem

Modulační signál je periodický obdélníkový signál s periodou T

$$s(t) = s(t + kT) = \begin{cases} +1 & , -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -1 & , \frac{T}{4} < t < \frac{3}{4}T. \end{cases}$$

Pro fázi můžeme tedy psát

$$\varphi(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t s(t) dt = \omega_c t + \psi(t), \quad (8.96)$$

kde $\psi(t)$ je periodický trojúhelníkový signál vzniklý integrací $s(t)$. Protože $|s(t)|_{\max} = 1$ je kmitočtový zdvih $\Delta\Omega = k_f$ a tudíž

$$\psi(t) = \psi(t + kT) = \begin{cases} \Delta\Omega t & , -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ \Delta\Omega \left(\frac{T}{2} - t\right) & , \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}. \end{cases} \quad (8.97)$$

Dosadíme-li (8.96) do (8.81), dostaneme

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_c e^{j\omega_c t} e^{j\psi(t)}. \quad (8.98)$$

Protože $e^{j\psi(t)}$ je periodická funkce času s periodou T , můžeme ji vyjádřit Fourierovou řadou

$$\left. \begin{aligned} e^{j\psi(t)} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_s t} ; & \omega_s &= \frac{2\pi}{T} ; \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} e^{j\psi(t)} e^{-jn\omega_s t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (8.99)$$

Dosadíme-li do těchto výrazů (8.97), dostaneme [3]

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\Delta\Omega}{\omega_s} - n \right) \right] + (-1)^n \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\Delta\Omega}{\omega_s} + n \right) \right] \right\}. \quad (8.100)$$

Modulovaný signál dostaneme z (8.98) po dosazení (8.99)

$$\dot{s}_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(\omega_c + n\omega_s)t}$$

jako reálnou část

$$s_{FM}(t) = \text{Re} [\dot{s}_{FM}(t)] = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cos(\omega_c + n\omega_s)t$$

kde C_n je dáno výrazem (8.100).

Uvedený postup lze použít pro obecné periodické signály.

8.1.2.4 Úzkopásmové úhlové modulace

V odstavci 8.1.2.1 jsme se zmínili, že pro malé hodnoty indexu modulace dostáváme úzkopásmovou kmitočtovou modulaci. Index modulace se definuje pro harmonický modulační signál podle (8.86)

$$\beta = \frac{k_f A_m}{\omega_m}.$$

Pro obecný signál budeme očekávat, že dosáhneme úzkopásmové modulace pro velmi malé hodnoty k_f . Potom je hodnota

$$k_f \int_{-\infty}^t s(t) dt = k_f g(t) \ll 1$$

a

$$e^{jk_f g(t)} \doteq 1 + j k_f g(t) \quad (8.101)$$

a z (8.81) dostaneme

$$\dot{s}_{FM}(t) \doteq A_c [1 + j k_f g(t)] e^{j\omega_c t}. \quad (8.102)$$

Úzkopásmový kmitočtově modulovaný signál pak můžeme vyjádřit jako

$$s_{FM}(t) = \text{Re} [\dot{s}_{FM}(t)] = A_c \cos \omega_c t - A_c k_f \int_{-\infty}^t s(t) dt \sin \omega_c t. \quad (8.103)$$

Ve výrazu (8.103) představuje první člen nosnou, druhý člen dvě postranní pásma.

Pro fázovou úzkopásmovou modulaci dostaneme podobně

$$s_{PM}(t) = A_c \cos \omega_c t - A_c k_p s(t) \sin \omega_c t. \quad (8.104)$$

Snažme se určit spektrum úzkopásmové FM. Označme

$$\begin{aligned} S(\omega) &\longleftrightarrow s(t) \\ G(\omega) &\longleftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t s(t) dt. \end{aligned}$$

Podle (3.20) je

$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega} S(\omega).$$

Předpokládáme, že spektrum modulačního signálu $S(\omega)$ je omezené, tj. nulové pro kmitočty $|\omega| > \omega_m$. Potom i $G(\omega)$ je omezené. Uplatníme-li nyní Fourierovu transformaci na (8.103), dostaneme pro spektrum úzkopásmové FM

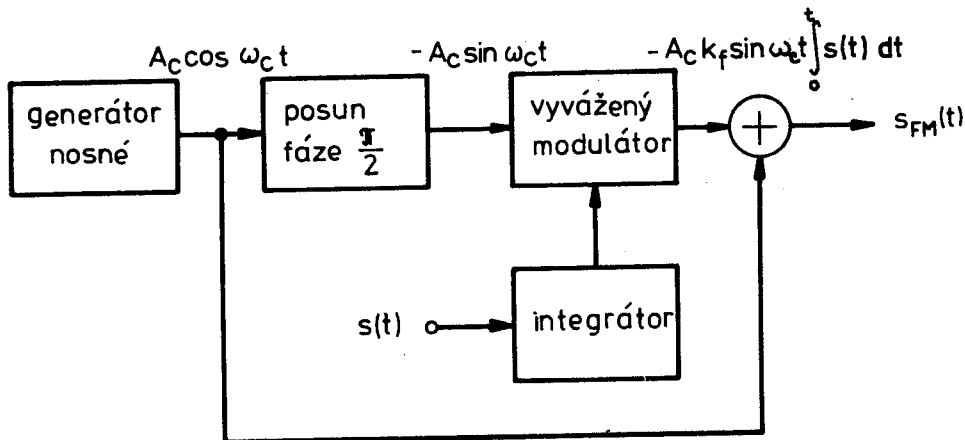
$$\begin{aligned} S_{FM}(\omega) = & \mathcal{F} A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \\ & + \frac{j A_c k_f}{2} [G(\omega - \omega_c) - G(\omega + \omega_c)]. \end{aligned} \quad (8.105)$$

Spektrum fázové modulace dostaneme, nahradíme-li v (8.105) $G(\omega)$ přímo $S(\omega)$.

Porovnejme nyní úzkopásmové úhlové modulace podle (8.105) s AM podle (8.10). Oba typy modulací mají nosnou na kmitočtu $+\omega_c$. U úhlových modulací jsou dvě postranní pásma stejné šířky jako u AM. Rozdíl je jen ve fázových poměrech.

8.1.2.5 Modulační soustavy pro úhlové modulace

Zabývejme se nejprve generováním úzkopásmové FM. Čtenář se snadno přesvědčí, že úzkopásmovou FM podle výrazu (8.103) lze získat na výstupu modulátoru zapojeného podle obr. 8.29.



Obr. 8.29

Úzkopásmovou PM získáme stejným zapojením, vynecháme-li integrátor. Je zřejmé, že získání úzkopásmové úhlové modulace je poměrně snadné.

Chceme-li získat širokopásmovou FM, zařadíme za modulátor podle obr. 8.29 násobič kmitočtu. Násobíme-li totiž úhlově modulovaný signál, např.

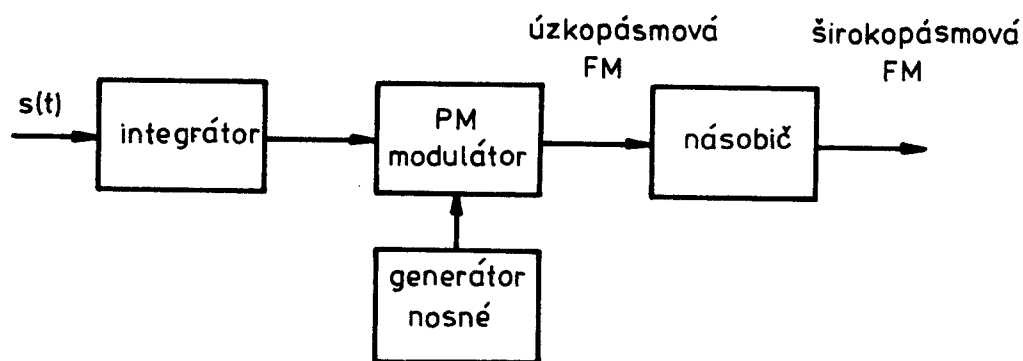
$$\cos^2 \psi(t) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\psi(t)] ,$$

$$\psi(t) = \omega_c t + k_f \int_0^t s(t) dt ,$$

zdvojnásobí se nejen nosný kmitočet, ale také index modulace a kmitočtový zdvih. Principiální zapojení širokopásmového takto pracujícího FM modulátoru je na obr. 8.30.

Toto uspořádání se nazývá Armstrongovým modulátorem a patří k nejstarším používaným zapojením pro získání FM.

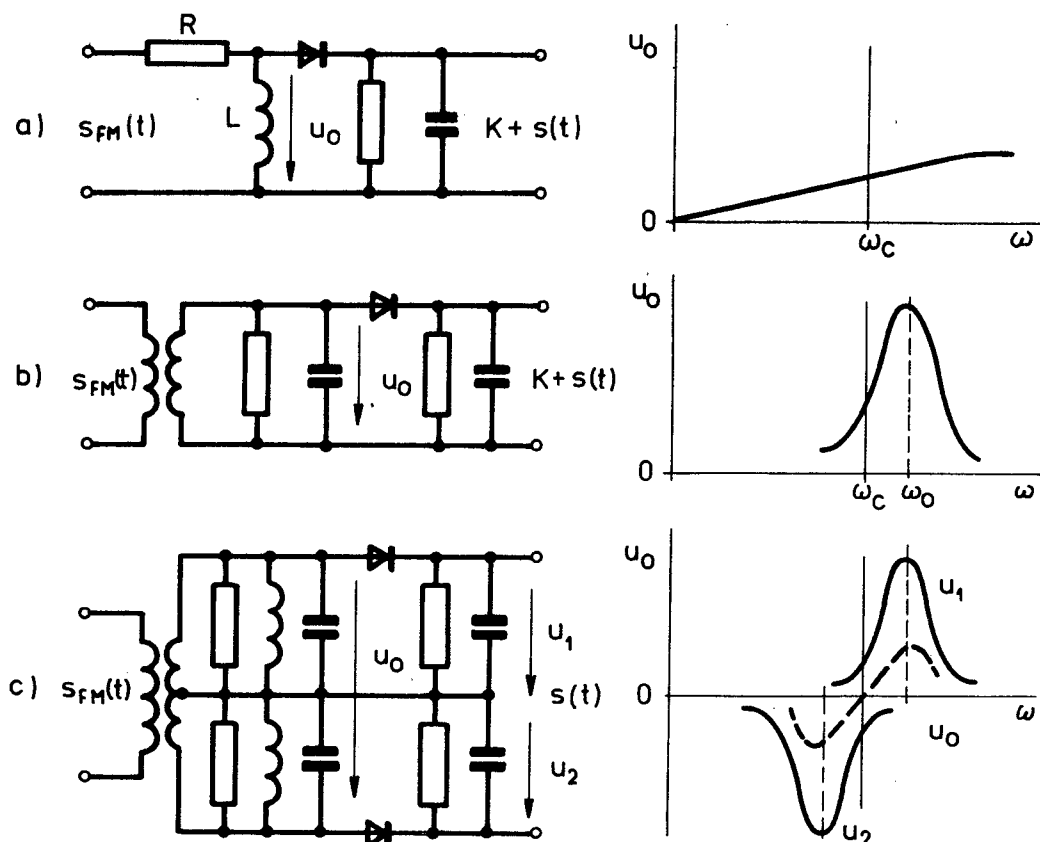
Existuje celá řada metod získání FM. Jednak jsou to metody nepřímé, využívající vztahu mezi FM a PM podle obr. 8.22 (k nim patří i Armstrongův modulátor). Dále jsou to přímé metody, kde modulační signál rozlaďuje prvek určující kmitočet oscilátoru. U těchto metod lze použít varikapu, nasycené indukčnosti, reaktanční elektronky, klystronu. Okamžitou hodnotou signálu lze řídit i kmitočet multivibrátoru. Podrobnější informace lze najít v literatuře [2], [3], [24], [25], [13].



Obr. 8.30

8.1.2.6 Demodulační soustavy pro FM

Abychom získali modulační signál z FM signálu, potřebujeme soustavu, jejíž výstupní napětí je úměrné kmitočtu přiváděného signálu. FM demodulátory se nazývají také kmitočtové diskriminátory. Jejich nejjednodušší tři typy jsou na obr. 8.31.



Obr. 8.31

Obvod RL v obr. 8.31 převádí FM signál na AM signál. Následujícím obálkovým detektorem získáme modulační signál $S(t)$. Diskriminátor má malou citlivost.

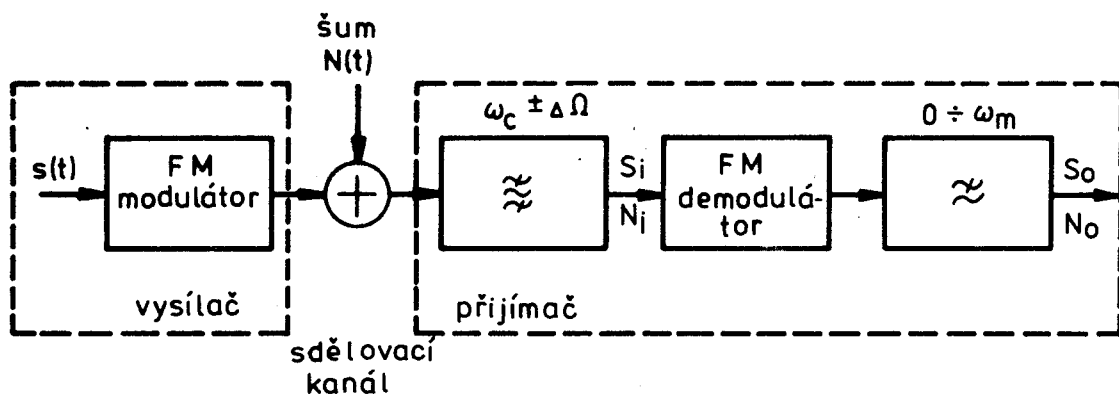
Diskriminátor obr. 8.31b převádí FM na AM pomocí rezonančního obvodu, který je naladěn poněkud mimo kmitočet ω_c . Není-li kmitočtový zdvih velký, mění se napětí na rezonančním obvodu téměř lineárně s kmitočtem. Nevýhodou tohoto diskriminátoru je jeho nelinearita.

Diskriminátor podle obr. 8.31c má velkou citlivost i dobrou linearitu. Jeho podstatou jsou dva laděné obvody symetricky rozladěné vzhledem ke kmitočtu nosné. Každý z obvodů pracuje jako diskriminátor podle obr. 8.31b. Při jejich společném zapojení se nelinearity obou obvodů kompenzují. Získané AM signály se demodulují obálkovými detektory. Zapojení se nazývá vyvážený diskriminátor.

S řadou prakticky používaných zapojení se čtenář setká v literatuře [2].

8.1.2.7 Šumové poměry u úhlových modulací

Podobně jako u AM (odst. 8.1.1.5) se zabýváme šumovými poměry u FM (viz obr. 8.32). Vstupní filtr přijímače odfiltrovává šumové složky s kmitočtem vně pásma $\omega_c \pm \Delta\omega$, ve kterém leží spektrum užitečného signálu. Je-li kmitočtový zdvih $\Delta\Omega$, je podle (8.93) šířka pásma tohoto filtru $2\Delta\Omega$. Signál $s_D(t)$ na vstupu dolní propusti je tvořen užitečným signálem a šumem s šířkou pásma $2\Delta\Omega$. Protože šířka pásma užitečného signálu je ω_m , můžeme odfiltrovat šumy vně tohoto pásma dolní propustí.



Obr. 8.32

Při našem rozboru budeme předpokládat, že střední výkon signálu můžeme určit nezávisle na výkonu šumu. V literatuře [3] je dokázána správnost tohoto předpokladu.

Podle předpokladu provedeme nejprve rozbor průchodu signálu bez šumu. FM signál je dán vztahem (8.79). Víme, že jeho střední výkon při modulaci je roven výkonu nosné a tedy $S_i = A_c^2/2$. Výstupní napětí demodulátoru je úměrné okamžitému kmitočtu ω_i , koeficient úměrnosti označme α , tj.

$$s_o(t) = \alpha \omega_i = \alpha \frac{d}{dt} \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t s(t) dt \right] = \alpha \omega_c + \alpha k_f s(t).$$

Užitečný signál je $\alpha k_f s(t)$ a jeho střední výkon

$$S_0 = \alpha^2 k_f^2 \widehat{s^2(t)} \quad (8.106)$$

Dále hledejme střední výkon šumu. Protože šířka pásma vstupu přijímače je $2 \Delta \Omega$ (obr. 8.32), je podle (6.147)

$$N_i = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c - \Delta \Omega}^{\omega_c + \Delta \Omega} S_N(\omega) d\omega. \quad (8.107)$$

Předpokládáme, že šum je bílý, tj. jeho spektrální výkonová hustota (obr. 6.37) $S_N(\omega) = N/2$ a výkon

$$N_i = \frac{1}{2\pi} N \cdot 2\Delta\Omega = 2N \Delta F; \Delta F = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}. \quad (8.108)$$

Pro určení výstupního výkonu předpokládáme, že platí výše uvedený předpoklad - budeme proto počítat pro nulový signál $S(t)$. Na vstupu detektoru je pak nosná a šum

$$\begin{aligned} A_c \cos \omega_c t + N(t) &= [A_c + A(t)] \cos \omega_c t + C(t) \sin \omega_c t = \\ &= E(t) \cos [\omega_c t + \Theta(t)] \end{aligned} \quad (8.109)$$

kde obálka

$$E(t) = \sqrt{[A_c + A(t)]^2 + C^2(t)} \quad (8.110)$$

a fáze

$$\Theta(t) = \arctg \frac{C(t)}{A_c + A(t)}. \quad (8.111)$$

Předpokládáme nyní malý šum ve srovnání s nosnou, tj. $A_c \gg A(t)$, $A_c \gg C(t)$. V tomto případě je fáze

$$\Theta(t) \doteq \arctg \frac{C(t)}{A_c} \doteq C(t)/A_c \quad (8.112)$$

a okamžitý kmitočet je

$$\omega_i = \frac{d}{dt} [\omega_c t + \Theta(t)] = \omega_c + \frac{1}{A_c} C'(t). \quad (8.113)$$

Signál na výstupu demodulátoru před dolní propustí je úměrný okamžitému kmitočtu

$$s_D(t) = \alpha \omega_i = \alpha [\omega_c + C'(t)/A_c] \quad (8.113a)$$

a tedy šumová složka na výstupu je

$$N_0(t) = \alpha C'(t)/A_c. \quad (8.114)$$

Můžeme si představit, že náhodný proces $C'(t)$ získáme na výstupu derivačního členu, na jehož vstupu je proces $C(t)$. Přenosová funkce derivačního členu je

$H(\omega) = j\omega$ a podle (7.26) můžeme určit spektrální výkonovou hustotu $S_{C'}(\omega)$ procesu $C'(t)$, známe-li spektrální výkonovou hustotu $S_C(\omega)$ procesu $C(t)$, jako

$$S_{C'}(\omega) = \omega^2 S_C(\omega).$$

Potom spektrální výkonová hustota výstupního náhodného procesu (8.114) je (před dolní propustí)

$$S_O(\omega) = \left(\frac{\alpha \omega}{A_C} \right)^2 S_C(\omega). \quad (8.115)$$

Ze závěrů odst. 7.3.1.2 plyne, že proces $C(t)$ má stejnou spektrální výkonovou hustotu $S_N(\omega)$ jako vstupní šum $N(t)$. Tzn., že spektrální výkonová hustota za dolní propustí je

$$S_O(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha \omega}{A_C} \right)^2 [S_N(\omega + \omega_c) + S_N(\omega - \omega_c)] & ; |\omega| < \omega_m, \\ 0 & ; |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (8.116)$$

a v případě bílého šumu $S_N(\omega + \omega_c) = S_N(\omega - \omega_c) = N/2$, tj.

$$S_O(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha \omega}{A_C} \right)^2 N & ; |\omega| < \omega_m, \\ 0 & ; |\omega| > \omega_m, \end{cases} \quad (8.117)$$

z čehož určíme střední výkon šumu na výstupu

$$N_O = \frac{\alpha^2 N}{\pi A_C^2} \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{A_C} \right)^2 \frac{N \omega_m^3}{\pi}. \quad (8.118)$$

Zlepšení odstupu signálu od šumu určíme ze vztahů (8.118), (8.106), (8.108)

$$\frac{(S_O/N_O)}{(S_i/N_i)} = \frac{2 \alpha^2 k_f^2 \widetilde{s^2(t)} \cdot 2 N \Delta F \cdot 3 A_C^2 \pi}{A_C^2 \alpha^2 N \omega_m^3},$$

tj.

$$\boxed{\frac{(S_O/N_O)}{(S_i/N_i)} = \frac{6 k_f^2 \widetilde{s^2(t)} \Delta \Omega}{\omega_m^3}}. \quad (8.119)$$

Pokusme se nyní porovnat FM s AM. U FM dostaneme z (8.106) a (8.118) pro odstup signálu od šumu na výstupu demodulátoru

$$\left(\frac{S_O}{N_O} \right)_{FM} = \frac{3 \pi A_C^2 k_f^2 \widetilde{s^2(t)}}{N \omega_m^3}.$$

Podobně u AM na výstupu obálkového detektoru je podle (8.53) a (8.54)

$$S_O = \widetilde{s^2(t)} ; N_O = D[N(t)]$$

a v případě bílého šumu při šířce pásma $2\omega_m$ je $N_0 = N\omega_m / \pi$
a tedy

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{AM} = \pi \frac{\widetilde{s^2(t)}}{N\omega_m} \quad (8.120)$$

Potom

$$\frac{(S_0/N_0)_{FM}}{(S_0/N_0)_{AM}} = 3 \left(\frac{A_C k_f}{\omega_m}\right)^2 \quad (8.121)$$

Ve výrazu (8.121) je A_C amplituda nosné FM. Předpokládejme, že nosná AM je také A_C a že modulačním signálem je harmonický signál. U AM budeme předpokládat, že hloubka modulace $m_{AM} = 1$; potom amplituda modulačního signálu je také A_C . Je-li tento signál také modulačním signálem pro FM, je $A_C k_f = \Delta\Omega$ a (8.121) přejde na

$$\boxed{\frac{(S_0/N_0)_{FM}}{(S_0/N_0)_{AM}} = 3\beta^2} \quad (8.122)$$

Z toho je zřejmé, že odstup signálu od šumu je u FM větší než u AM, je-li $\beta > 1/\sqrt{3} \doteq 0,6$, tj. u širokopásmové FM. Tohoto zlepšení je dosaženo za cenu zvětšení šířky pásma. Čtenář si sám ověří, že pro $\beta = 5$ je odstup 75 krát lepší, avšak potřebná šířka pásma vzroste 8 krát (nutno použít obr. 8.27).

Uvedené výsledky byly získány pro malý šum. Budeme-li β zvyšovat, poroste šířka pásma a poroste výkon vstupního šumu, až dosáhne výkonu nosné a výsledky se zhorší - vznikne prahový jev. Ten lze vysvětlit následujícím způsobem. Na vstupu detektoru je signál a šum. Šum můžeme vyjádřit pomocí obálky $R(t)$ a fáze $\phi(t)$, výsledný signál pomocí obálky $E(t)$ a fáze $\Theta(t)$:

$$A_C \cos[\omega_c t + k_f \int s(t) dt] + N(t) = A_C \cos[\omega_c t + \psi(t)] + \\ + R(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] = E(t) \cos[\omega_c t + \phi(t) + \Theta(t)]$$

tj. fáze

$$\Theta(t) = \arctg \frac{A_C \sin[\psi(t) - \phi(t)]}{R(t) + A_C \cos[\psi(t) - \phi(t)]} \quad (8.123)$$

V případě velkého šumu je $R(t) \gg A_C$ a (8.123) přejde na

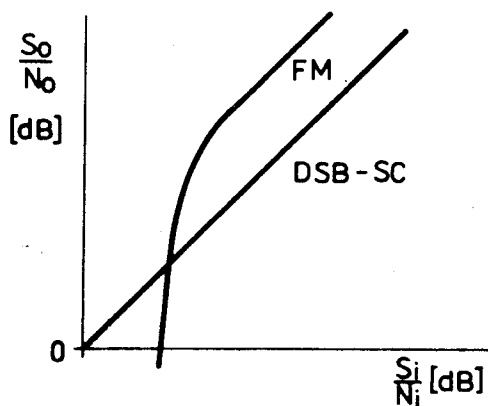
$$\Theta(t) \doteq \arctg \frac{A_C \sin[\psi(t) - \phi(t)]}{R(t)} \doteq \frac{A_C}{R(t)} \sin[\psi(t) - \phi(t)] \quad (8.124)$$

Napětí na výstupu detektoru je

$$s_D(t) = \alpha \frac{d}{dt} [\omega_c t + \phi(t) + \Theta(t)] = \alpha [\omega_c + \phi'(t) + \Theta'(t)]$$

Napětí $\alpha \phi'(t)$ je šumové, užitečný signál je obsažen v $\Theta'(t)$. Z (8.124) je však zřejmé, že $\Theta'(t)$ obsahuje náhodný proces $1/R(t)$ a užitečný signál nelze oddělit; výstupní napětí detektoru je šumové. Tento jev vznikne od určité prahové hodnoty

S_i/N_i . Situace je znázorněna na obr. 8.33.



Obr. 8.33

Podle (8.117) spektrální výkonová hustota šumu závisí na kvadrátu kmitočtu. Pro další zlepšení odstupu signálu od šumu se v modulatoru zdůrazní vyšší kmitočty (preemfáze). V demodulátoru je nutné toto zdůraznění kompenzovat (deemfáze).

Postupem uvedeným výše lze snadno odvodit, že u fázové modulace je

$$\frac{(S_o/N_o)_{PM}}{(S_o/N_o)_{AM}} = \left(\frac{\Delta \Omega}{\omega_m} \right)^2, \quad (8.125)$$

kde $\Delta \Omega$ je kmitočtový zdvih fázové modulace podle (8.83) a ω_m je šířka pásma dolní propusti za fázovým demodulátorem.

8.2 IMPULSOVÁ MODULACE

Jak jsme uvedli v úvodu této kapitoly, může být nosný signál diskrétní v čase - posloupnost impulsů. Parametry impulsů je třeba řídit hodnotou modulačního signálu v okamžiku vzniku impulsů - provést jeho vzorkování. Pokud hodnoty vzorků řídící parametry impulsů nabývají nespočetně mnoha hodnot z určitého intervalu (spojitá posloupnost - viz kap. 1), mluvíme o analogové impulsové modulaci. Nabývají-li vzorky konečného počtu hodnot, které zpravidla vyjadřujeme číselně, mluvíme o číslíkových nebo kódových impulsovéch modulacích.

Společným základem impulsovéch modulací je Shannon-Kotělnikovova vzorkovací věta probraná v odst. 5.2.6. Připomeňme její podstatu. Máme-li spojitý signál $S(t)$ se spektrem omezeným na kmitočtové pásmo $(-f_m, f_m)$ a odebíráme-li vzorky se vzorkovacím kmitočtem $f_{vz} > 2f_m$, můžeme $S(t)$ aproximovat součtem signálů typu $\sin x/x$. Tyto signály jsou váženy hodnotami vzorků a svých maximálních hodnot nabývají v okamžiku odebrání vzorku. Zabývejme se nejprve principem získání signálů $\sin x/x$ vážených hodnotami vzorků.

Budeme-li získávat vzorky se vzorkovacím kmitočtem vyhovujícím vzorkovací větě, vážit jimi Diracovy impulsy a ty přivádět na vstup dolní propusti, dostaneme na jejím výstupu podle (7.17) požadovanou posloupnost funkcí $\sin x/x$ vážených hodnotami vzorků. Sečtením členů této posloupnosti dostaneme původní signál. Z uvedeného je tedy zřejmé, že pro přenos signálu stačí přenášet jeho vzorky s dostatečnou rychlostí, umíme-li z nich např. výše popsaným způsobem rekonstruovat signál. Vzorky můžeme, jak jsme uvedli, přenášet tak, že jimi řídíme některý z parametrů posloupnosti impulsů u modulací analogových, nebo je přenášíme jako čísla u modulací kódových. Zabývejme se nyní analogovými impulsovémi modulacemi.

8.2.1 Analogová impulsová modulace

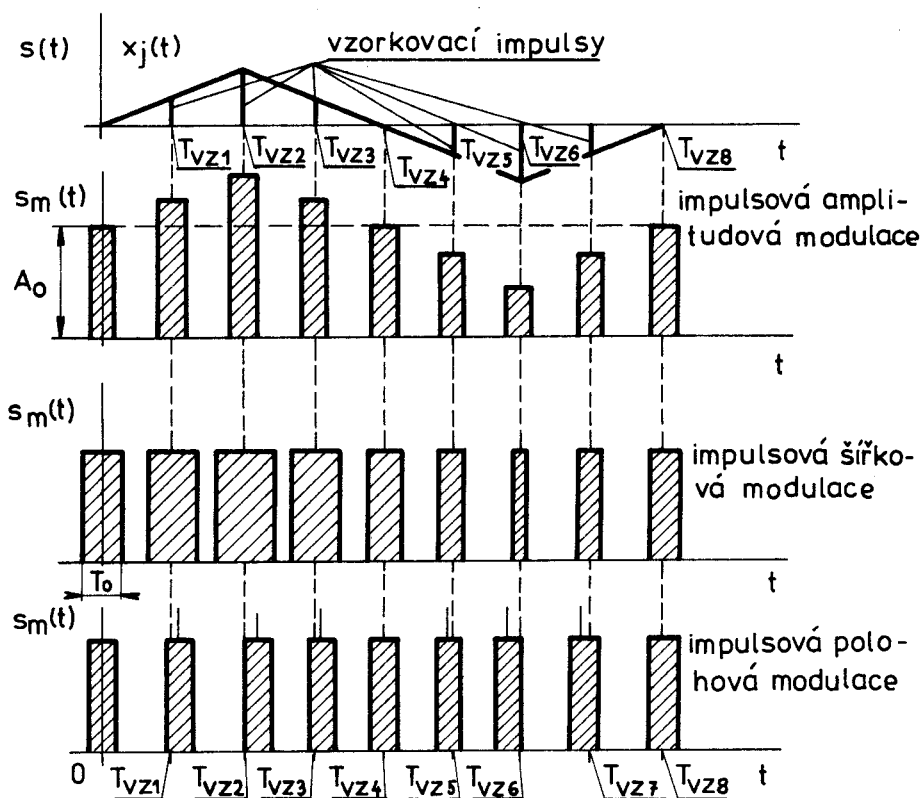
V posloupnosti impulsů je každý impuls definován

- 1) výškou (amplitudou) A ,
- 2) šířkou τ ,
- 3) polohou na ose času.

Podle toho, který z parametrů impulsů řídíme odebíranými vzorky signálu $S(t)$, rozlišujeme tyto typy modulace:

- 1) impulsová amplitudová modulace (PAM - pulse amplitude modulation),
- 2) impulsová šířková modulace (PDM - pulse duration modulation nebo PWM - pulse width modulation),
- 3) impulsová polohová modulace (PPM - pulse position modulation).

Na obr. 8.34 jsou schematicky znázorněny průběhy posloupnosti impulsů pro všechny tři výše uvedené modulace a daný signál $S(t)$.



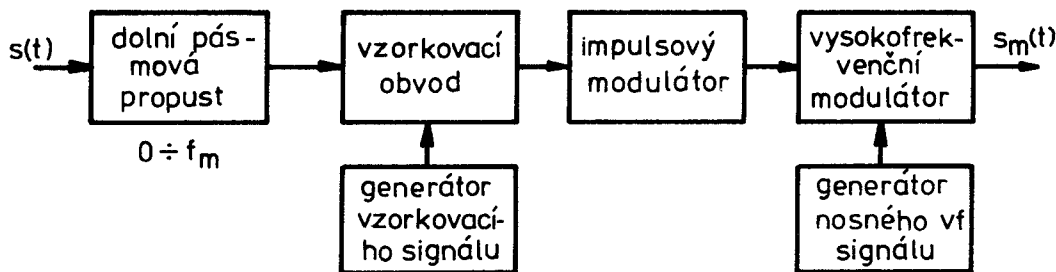
Obr. 8.34

Při šířkové nebo polohové impulsové modulaci musí být impulsy modulovaného signálu zpožděné za vzorkovacími impulsy, protože nemohou být generovány dříve než jsou odpovídající vzorkovací impulsy přivedeny na tvarovací obvod.

Při amplitudové a šířkové impulsové modulaci impulsy modulovaného signálu nevymizí, je-li $S(t) = 0$, ale jejich parametry nabudou definované nenulové hodnoty (A_0, T_0).

Při přenosu impulsově modulovaných signálů na velké vzdálenosti je třeba si uvědomit, že impulsově modulovaný signál obsahuje stejnosměrnou složku a nízkofrekvenční složky (první harmonické složky vzorkovacího kmitočtu f_{VZ}). Přímý přenos takového signálu na velké vzdálenosti není možný. Proto impulsově modulovaným signálem $S_m(t)$ modulujeme vysokofrekvenční harmonický nosný signál a přenos je proveden jeho prostřednictvím.

Skupinové schéma vysílače impulsově modulovaného signálu je uvedeno na obr. 8.35.



Obr. 8.35

Způsoby, jak modulujeme impulsy nosný harmonický signál, se budeme zabývat ve zvláštním odstavci. Zde probereme vytváření posloupnosti impulsů.

8.2.1.1 Impulsová amplitudová modulace PAM

Rozeznáváme 3 typy PAM podle způsobu vzorkování

- ideální vzorkování,
- přirozené vzorkování (v ruské literatuře vzorkování 1. druhu, v české literatuře [27] přesné vzorkování, anglicky natural sampling),
- okamžité vzorkování (vzorkování 2. druhu, zarovnané vzorkování, ang. flat top sampling [25]).

U všech typů vzorkování násobíme modulační signál $S(t)$ posloupností impulsů $p(t)$

$$S_{PAM}(t) = S(t) \cdot p(t) \quad (8.126)$$

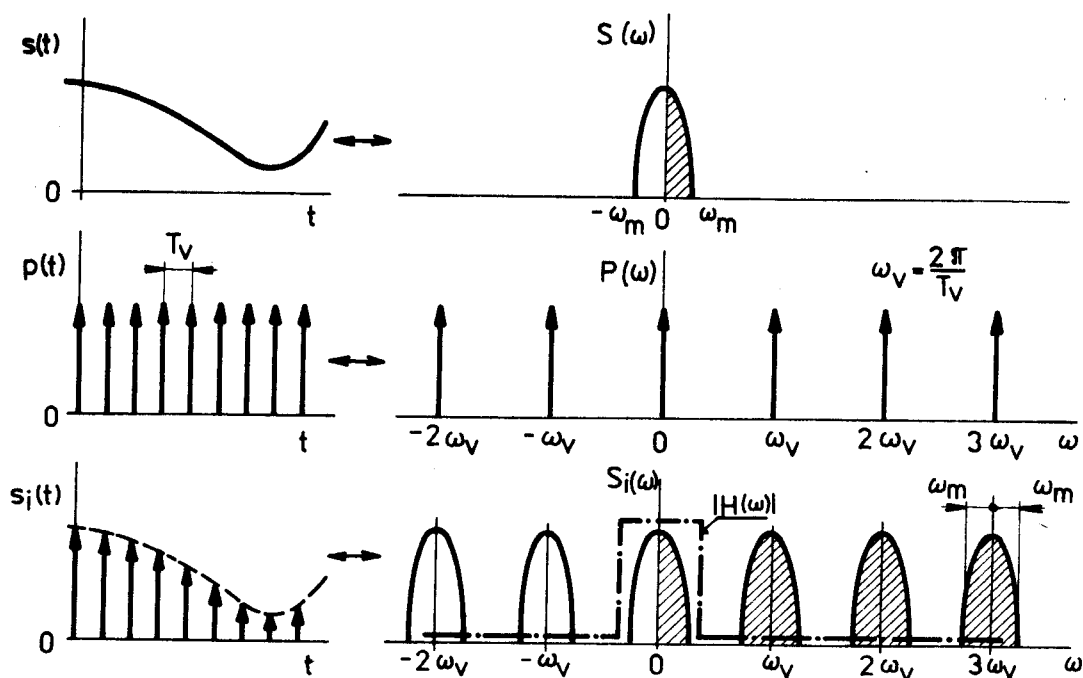
Jednotlivé typy PAM se liší charakterem posloupnosti $p(t)$.

a) Ideální vzorkování

Ideální vzorkování jsme popsali v úvodu tohoto odstavce. Impulsy v posloupnosti (8.126) jsou Diracovy a tedy

$$p(t) = \sum_k \delta(t - kT_V). \quad (8.127)$$

Proces vzorkování můžeme nejjednodušší analyzovat v kmitočtové oblasti (obr. 8.36). Předpokládáme, že spektrum modulačního signálu je omezené. Spektrum $P(\omega)$ posloupnosti Diracových impulsů $p(t)$ jsou Diracovy impulsy v oblasti kmitočtu.



Obr. 8.36

Spektrum modulovaného signálu (8.126) je dáno konvolucí spektra signálu a spektra Diracových impulsů. Tvoří ho opakující se laloky spektra signálu $S(\omega)$ posunuté o násobky vzorkovacího kmitočtu.

Modulační signál získáme - jak je z obr. 8.36 patrné - přivedeme-li signál na dolní propust. To je stejný výsledek, jako při analýze v oblasti časové, který jsme uvedli v úvodu odst. 8.2.

Z obr. 8.36 znovu dostaneme výsledek plynoucí ze vzorkovací věty. Abychom mohli pomocí dolní propusti získat spektrum $S(\omega)$ modulačního signálu $s(t)$, nesmí se laloky spektra modulovaných Diracových impulsů překrývat, tedy musí být

$$2\omega_m < \omega_v,$$

tj.

$$f_v > 2f_m.$$

(8.128)

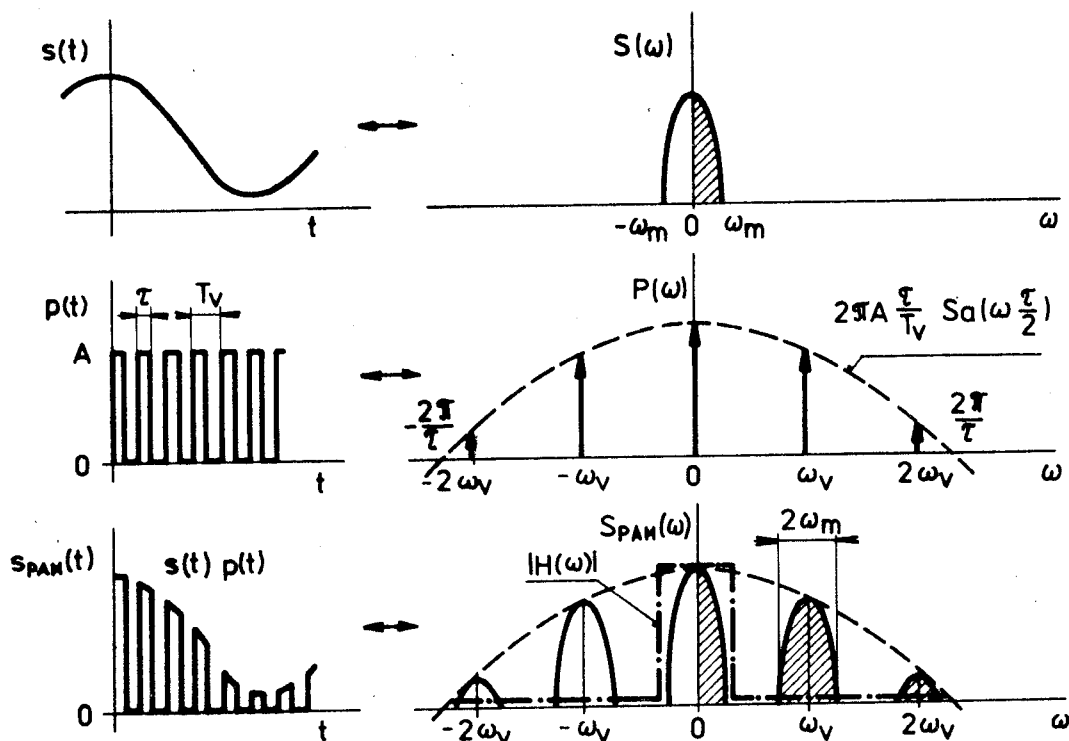
Pro přenos modulovaných Diracových impulsů by bylo třeba přenášet nekonečně široké pásmo kmitočtů. Protože však chceme získat jen modulační signál, není to nutné.

Diracovy impulsy nelze realizovat. Používáme proto úzkých impulsů různého průběhu, které budeme v prvním přiblížení považovat za obdélníkové.

b) Přirozené vzorkování

Signál $p(t)$ je posloupnost obdélníkových impulsů a vzorkování spočívá v tom, že se skutečně provádí součin (8.126) viz obr. 8.37. V kmitočtové oblasti vzniknou opět laloky odpovídající spektru původního signálu. Jejich výška je však dána koeficienty Fourierovy řady odpovídající signálu $p(t)$.

Z obrázku je zřejmé, že i zde musí být zachována podmínka (8.128) a že



Obr. 8.37

k získání modulačního signálu stačí přivést modulované impulsy na dolní propust s amplitudovou charakteristikou $|H(\omega)|$. Na jejím výstupu získáme modulační signál.

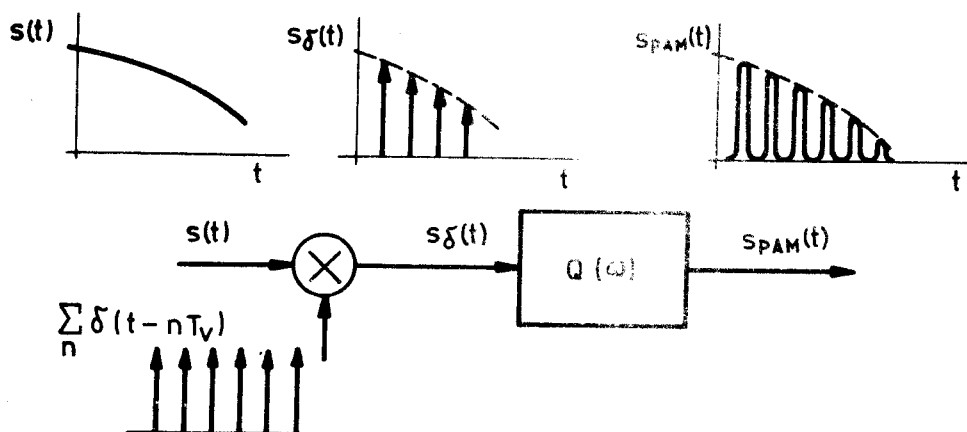
c) Okamžité vzorkování

U přirozeného vzorkování má každý impuls jiný tvar. U okamžitého vzorkování mají všechny impulsy stejný průběh, mění se jen jejich amplituda. Je-li průběh jednoho impulsu $q(t)$, zapíšeme (8.126) jako

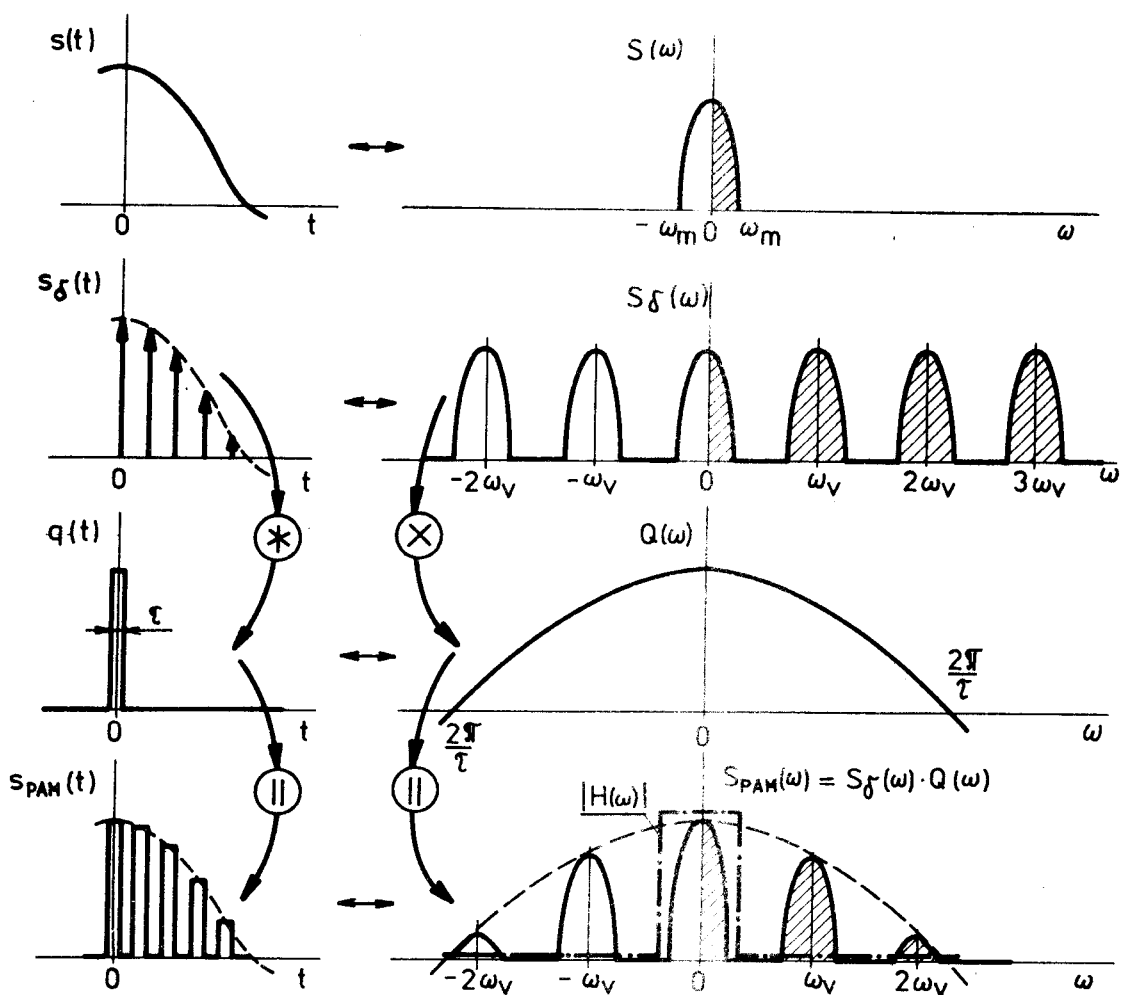
$$s_{PAH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_v) q(t - nT_v). \quad (8.129)$$

Průběh $q(t)$ nejčastěji není obdélníkový. Proces vzorkování pak můžeme popsat podle obr. 8.38. Signál $q(t)$ je impulsová odezva obvodu na Diracův impuls. Obvod má přenosovou charakteristiku $Q(\omega) \leftrightarrow q(t)$. Potom posloupnosti Diracových impulsů vážených hodnotami signálu odpovídají impulsy podle vztahu (8.129). V kmitočtové oblasti je proces vzorkování analyzován na obr. 8.39.

Spektrum $S_\delta(\omega)$ na vstupu lineárního obvodu s přenosovou charakteristikou $Q(\omega)$ odpovídá ideálnímu vzorkování. Konvoluce průběhu impulsů (zde odpovídá impulsově odezvě) s posloupností Diracových impulsů dává modulovaný signál. Konvoluci v časové oblasti odpovídá, jak víme, součin v kmitočtové oblasti. Dostáváme podobný výsledek jako u přirozeného vzorkování. Přesto však je zde podstatný rozdíl. Laloky spektra modulovaného signálu nejsou opakováním spektra modulačního signálu. Hodnota spektra modulovaného signálu se na každém ω získá jako



Obr. 8.38



Obr. 8.39

součin $S(\omega) Q(\omega)$. Není-li průběh $Q(\omega)$ dostatečně plochý, vzniká tzv. aperturové zkreslení a signál $S_{\text{PAM}}(t)$ po průchodu dolní propustí neodpovídá přesně modulačnímu signálu. Zkreslení lze odstranit, použijeme-li místo ideální dolní propustí propust s amplitudovou charakteristikou

$$|H(\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|Q(\omega)|} & |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

8.2.1.2 Impulsové šířkové modulace PDM

Při impulsové šířkové modulaci závisí šířka (trvání) impulsu na velikosti příslušného vzorku. Trvání impulsu lze vyjádřit vztahem

$$\tau(k) = \tau_0 [1 + m s(k T_{VZ})], \quad (8.130)$$

kde τ_0 je trvání impulsu bez modulace ($s(t) = 0$) a

m je činitel úměrnosti, který zajišťuje, aby pro žádnou možnou hodnotu signálu $S(t)$ impulsy nevymizely; $0 < m \leq 1$.

Pak lze posloupnost impulsů popsat rovnicí

$$s_{\text{PDM}}(t) = \sum_k A_0 \text{rect} \left[\frac{t - k T_{VZ}}{\tau(k)} \right]. \quad (8.131)$$

Doposud jsme předpokládali, že při impulsové šířkové modulaci je vzdálenost impulsů konstantní. V technické praxi však bývá zachována konstantní vzdálenost náběžných hran impulsů, kdežto poloha sestupných hran se mění podle hodnoty vzorků. Spektrální analýza signálu s šířkovou impulsovou modulací je velmi komplikovaná. Způsob generování šířkově modulovaného signálu je na obr. 8.40.

V rádiové komunikaci se PDM používá poměrně málo. Slouží především ke generování PPM signálu (odst. 8.2.1.3).

8.2.1.3 Impulsové polohové modulace PPM

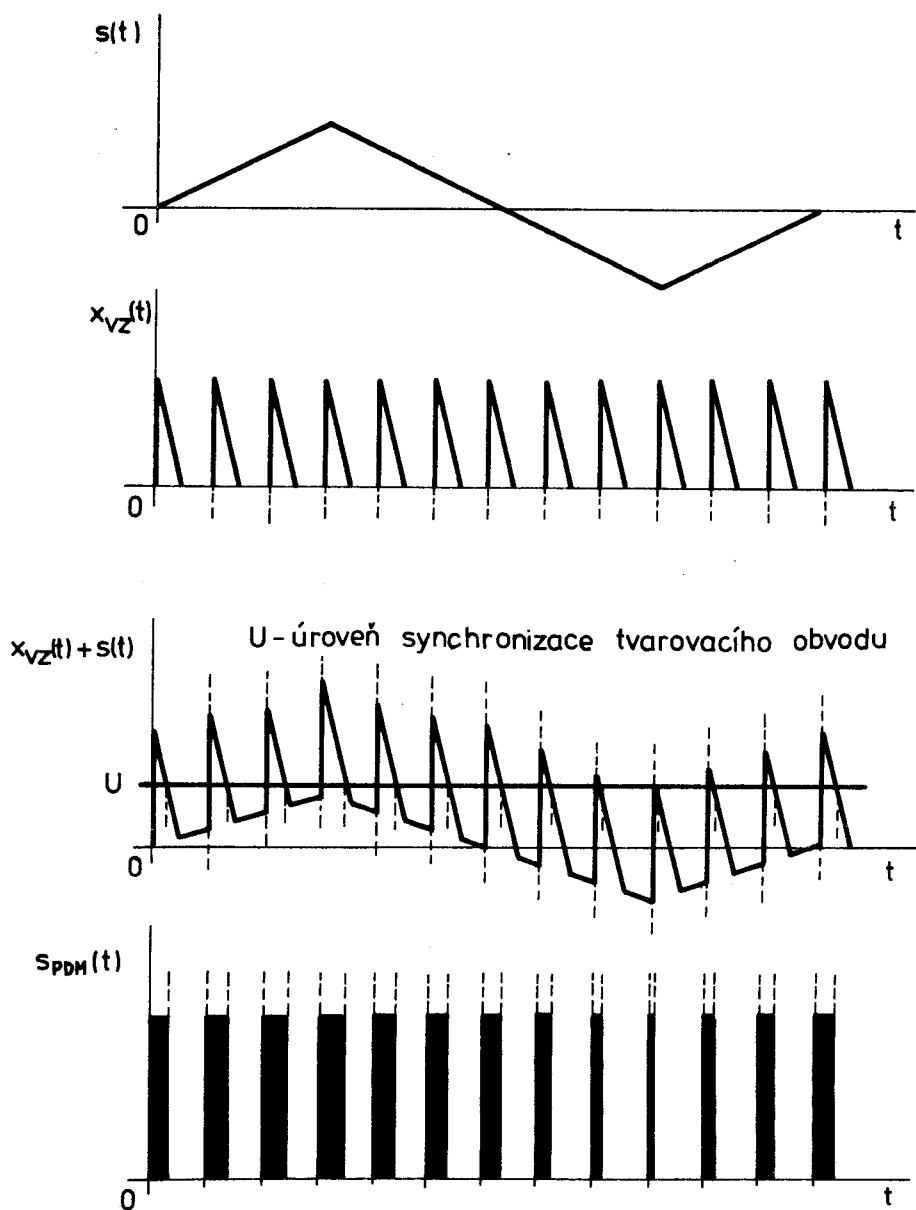
U impulsové šířkové modulace nesla informaci o velikosti vzorků poloha sestupné hrany impulsu. Poloha sestupné hrany impulsu u PDM signálu může tedy sloužit ke generování PPM signálu, jak je naznačeno na obr. 8.41.

Impulsy při PPM nemění dobu trvání, lze je generovat velmi úzké v porovnání s impulsy při PDM a výkon vysílače je daleko lépe využit. Snížení výkonu při PPM je její hlavní výhodou.

Označíme-li okamžik výskytu každého impulsu t_k , pak při rovnoměrném vzorkování v čase $t = k T_{VZ}$ můžeme časové umístění každého impulsu popsat rovnicí

$$t_k = k T_{VZ} + t_0 S(k T_{VZ}), \quad (8.132)$$

kde t_0 je modulační konstanta, která fyzikálně znamená největší dovolené časové posunutí impulsu vzhledem k okamžiku $t = k T_{VZ}$, tj. vzhledem k okamžiku výskytu impulsů pro $S(t) = 0$. Při nerovnoměrném vzorkování, které se v praxi častěji používá, je vzorek pro k -tý impuls vybrán v čase



Obr. 8.40

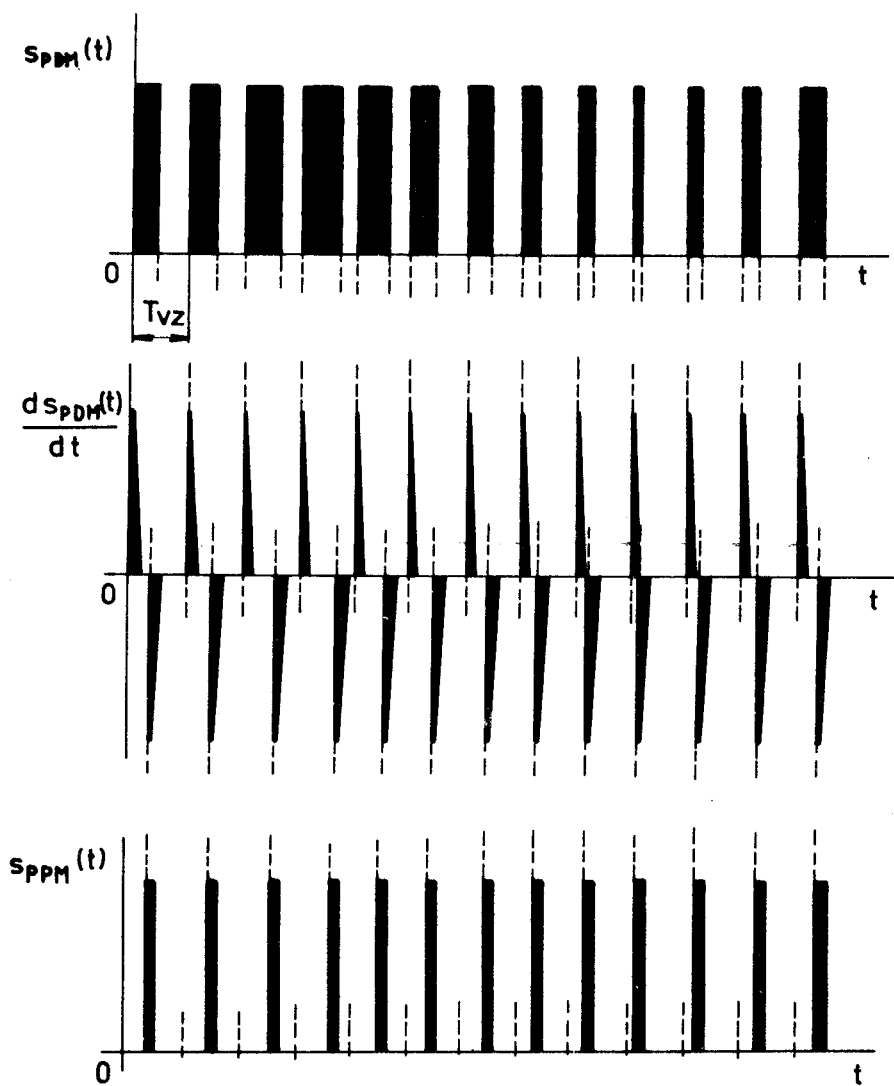
$$t_k = k T_{vz} + t_0 \quad s(t_k). \quad (8.133)$$

Nesnáz však spočívá v tom, že okamžik vzorkování není určen explicitně. Způsob řešení tohoto problému je uveden v literatuře [13].

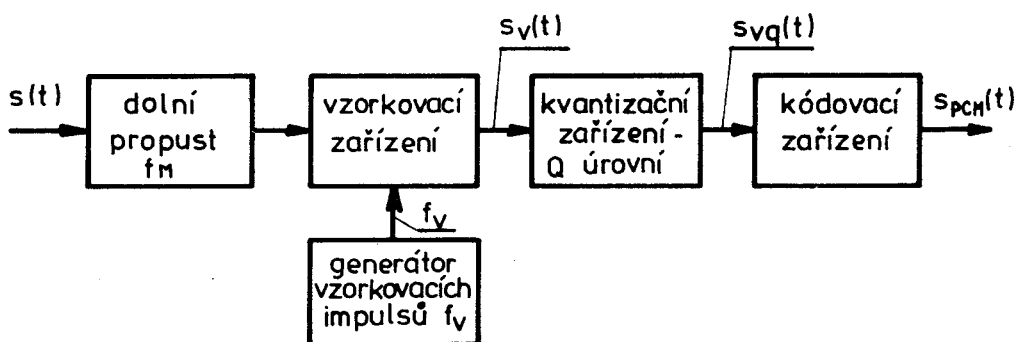
8.2.2 Číslicová impulsová modulace

8.2.2.1 Kódová impulsová modulace PCM

Kódová impulsová modulace se často označuje jako PCM (pulse code modulation). Princip činnosti modulátoru je naznačen na obr. 8.42.



Obr. 8.41



Obr. 8.42

Spektrum signálu $S(t)$ je nejprve omezeno na pásmo kmitočtů $0 \leq f \leq f_m$ dolní propustí. Ze signálu s omezeným spektrem jsou vybrány vzorky ve vzorkovacím zařízení. Jejich amplitudy jsou v kvantovacím zařízení porovnány s předem určenými, tzv. kvantovacími úrovněmi. Výsledný kvantovaný signál $S_{VQ}(t)$ je tvořen diskretními impulsy, jejichž velikost může nabývat pouze konečného počtu Q různých hodnot (podle počtu kvantovacích úrovní). Každý impuls kvantovaného signálu je podle své velikosti převeden na skupinu ν impulsů (slovo) podle předem stanovené dohody - kódu.

Parametry zakódovaného PCM signálu závisí jak na počtu úrovní, tak na počtu impulsů ve slovu. Může-li každý impuls ve slovu nabývat μ diskretních hodnot a má-li slovo ν impulsů, může jedno slovo vyjádřit μ^ν možností. Má-li systém Q kvantovacích úrovní, musí být

$$\mu^\nu \geq Q. \quad (8.134)$$

Častěji však potřebujeme k danému počtu úrovní Q znát počet ν impulsů ve slovu. Z (6.32) dostaneme

$$\nu \geq \log_\mu Q. \quad (8.135)$$

V praxi často pracujeme s dvoustavovým systémem, kdy impulsy ve slovu mohou nabývat pouze dvou hodnot a tedy $\mu = 2$. Potom počet možných kvantovacích úrovní při ν impulsích ve slovu je

$$Q = 2^\nu. \quad (8.136)$$

Na obr. 8.43 je znázorněn proces PCM při osmi kvantovacích úrovních a třech impulsích ve slovu.

Pro demodulaci PCM je nutný číslicově-analogový převodník. Na jeho výstupu získáváme vzorky signálu. Jejich filtrací dolní propustí dostaneme demodulovaný signál. Je třeba zdůraznit, že demodulovaný signál se liší od signálu modulačního i v případě, že se při přenosu neuplatní šum. V modulační soustavě totiž vzniká tzv. kvantovací šum zaokrouhlováním velikosti vzorků signálu na kvantovací úrovně.

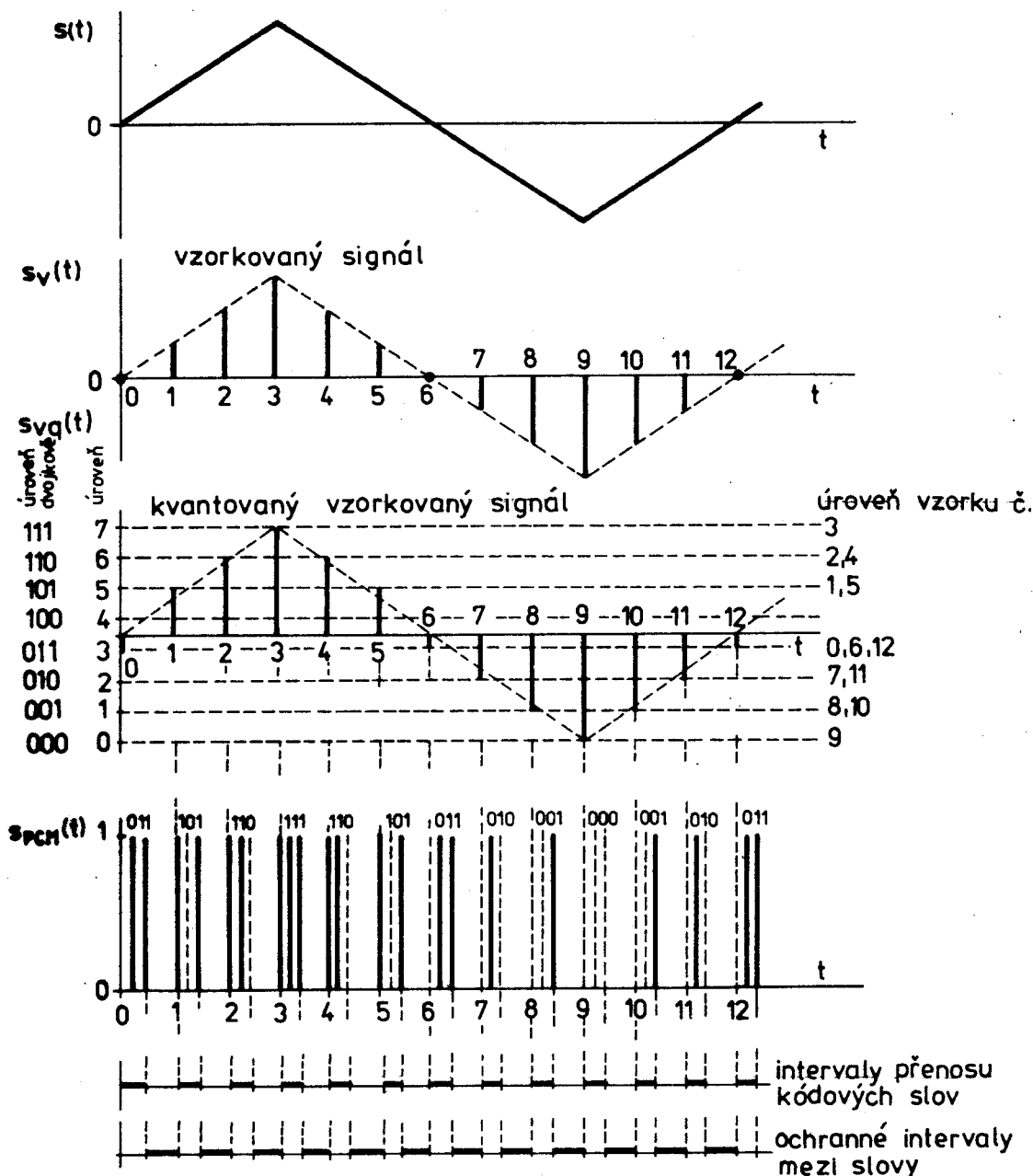
8.2.2.2 Delta modulace DM

Delta modulace (DM) je obměna impulsové kódové modulace. Její hlavní výhoda spočívá ve značném zjednodušení kódovacího zařízení.

Podstata delta modulace spočívá v porovnávání okamžité hodnoty signálu $S(t)$ a jeho "schodovité" aproximace $S_Q(t)$. Změna hodnoty aproximujícího signálu $S_Q(t)$ může nastat jen v okamžicích $k T_{VZ}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Velikost změny je $\pm \Delta$.

Nejprve vytvoříme rozdílový signál $s(t) - S_Q(t)$. Ten je veden na omezovač s velmi strmou charakteristikou, na jehož výstupu se objevuje signál $+\Delta$ nebo $-\Delta$ podle znaménka rozdílového signálu; hodnota Δ je pevně dána. Výstup omezovače se pravidelně ideálně vzorkuje s periodou T_{VZ} , takže vzniká posloupnost impulsů

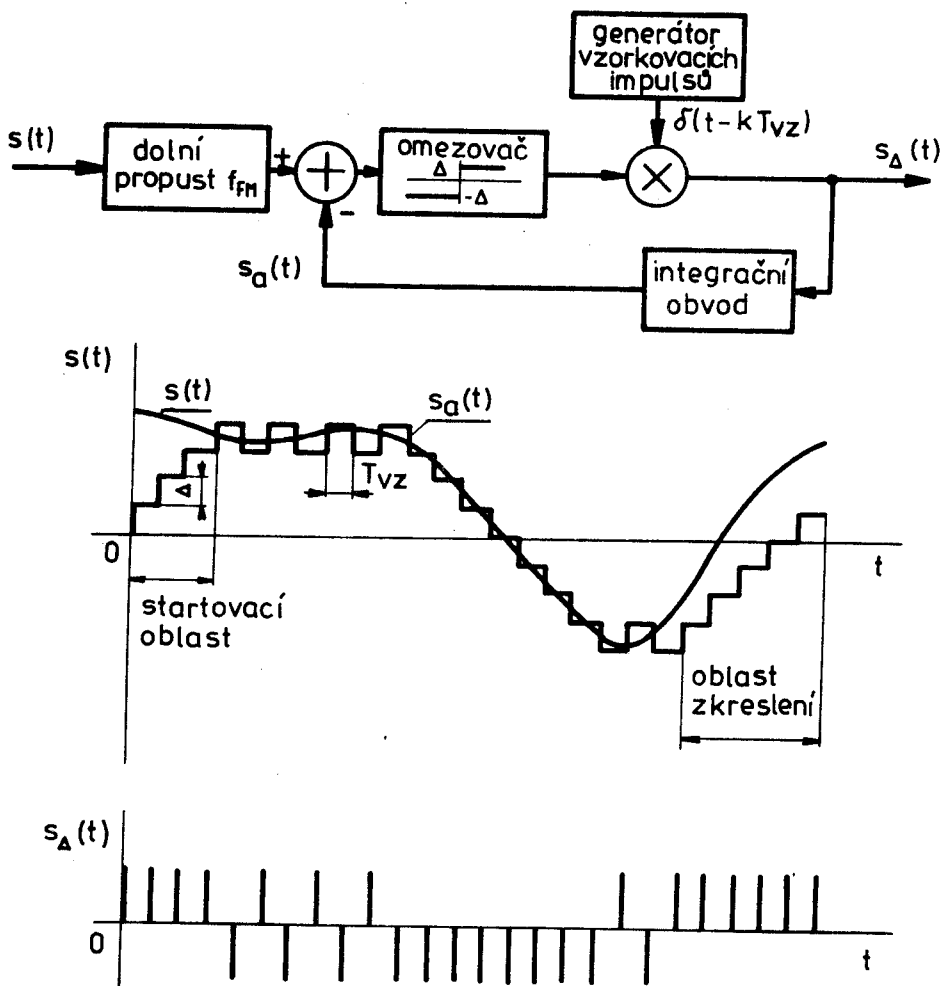
$$s_\Delta(t) = \Delta \sum_k \text{sign}[s(kT_{VZ}) - S_Q(kT_{VZ})] \delta(t - kT_{VZ}), \quad (8.137)$$



Obr.8.43

která je výstupním produktem modulátoru. Integrací těchto impulsů získáváme schoditou aproximaci $S_Q(t)$ signálu $S(t)$. Principiální zapojení modulátoru a průběhy signálů jsou na obr. 8.44.

Jestliže je $S(t) > S_Q(t)$, vznikne na výstupu omezovače signál s hodnotou $+\Delta$ a na výstupu modulátoru Diracův impuls s vahou $+\Delta$. Jeho integrací vzroste $S_Q(t)$ o hodnotu $+\Delta$. Porovnávání se opakuje s periodou T_{VZ} a sig-



Obr. 8.44

nál $s_Q(t)$ se "schodovitě" zvětšuje až překročí hodnotu $s(t)$. To má za následek, že výstupní signál omezovače je $-\Delta$ a na výstupu modulátoru vznikne impuls s vahou $-\Delta$. Signál $s_Q(t)$ klesne o hodnotu $-\Delta$. Nemění-li $s(t)$ hodnotu, je $s_Q(t)$ obdélníkový signál a na výstupu modulátoru jsou střídavě kladné a záporné impulsy.

Z obr. 8.44 je zřejmé, že stupňovitě se měnící signál $s_Q(t)$ sleduje signál $s(t)$ s přesností lepší než Δ , kromě dvou oblastí. První oblast, kde rozdíl mezi $s(t)$ a $s_Q(t)$ je větší než Δ , je na počátku modulačního procesu. Tato oblast zvaná startovací je nutná k tomu, aby signál $s_Q(t)$ dosáhl velikosti signálu $s(t)$. Její velikost je přímo úměrná hodnotě signálu $s(t)$, periodě vzorkování T_{VZ} a nepřímo úměrná kroku Δ . Je to neproduktivní oblast snižující pohotovost delta-modulátoru k provozu. Další oblast, kde signál $s_Q(t)$ nesleduje signál $s(t)$, vzniká, když změna hodnoty signálu $s(t)$ je větší než možný vzrůst nebo pokles signálu $s_Q(t)$. Aby nedocházelo k tomuto jevu, který při rekonstrukci signálu na přijímací straně způsobuje jeho zkreslení, musí být kmitočet vzorkování f_{VZ} dostatečně vysoký pro daný krok Δ . Máme-li např. harmonický modulační signál

$s(t) = A_m \cos \omega_m t$, největší změna signálu je

$$\left| \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=\frac{T}{4}} = \omega_m A_m$$

za sekundu. Největší změna schodovitého signálu za 1 sekundu je Δf_{VZ} . Aby při modulaci harmonickým signálem nevznikla chyba, musí být nárůst schodovitého signálu vyšší než nárůst $s(t)$, tj. $\Delta f_{VZ} \geq \omega_m A_m$. Z toho plyne omezení na amplitudu signálu $s(t)$

$$A_m \leq \frac{\Delta f_{VZ}}{2\pi f_m} . \quad (8.138)$$

Zvláštním případem DM je adaptivní delta modulace ADM. U ADM je krok kvantování proměnlivý a je tak možné modulovat signály s vyšší dynamikou než u DM [4].

Dále existuje diferenciální PCM, kde se nepřenášejí vzorky, ale rozdíly mezi predikovanou hodnotou signálu a jeho vzorkem.

8.2.3 Šumové poměry u impulsové modulace

Podobně jako u modulace harmonického nosného signálu budeme u impulsových modulací vyšetřovat zlepšení odstupu signálu od šumu na výstupu demodulátoru proti odstupu na vstupu.

8.2.3.1 PAM

U systému PAM se signál $s(t)$ vzorkuje a v přijímači vzorky procházejí dolní propustí, na jejímž výstupu je původní spojitý modulační signál. Signál se v podstatě přemáhá přímo. Při přenosu se k němu přičítá šum. Demodulace spočívá v průchodu dolní propustí - je zřejmé, že se při tom nijak neovlivní šumové poměry a tedy

$$\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = 1$$

(8.139)

8.2.3.2 PPM

Posun impulsu při modulaci je vzhledem k jeho poloze bez modulace dán hodnotou vzorku $s(kT_{VZ})$ viz (8.132). Impulsy procházejí sdělovacím kanálem s šířkou pásma B . To vede ke zkreslení obdélníkových impulsů. Přenesené impulsy můžeme nahradit lichoběžníkovými, u nichž doba náběžné hrany je přibližně

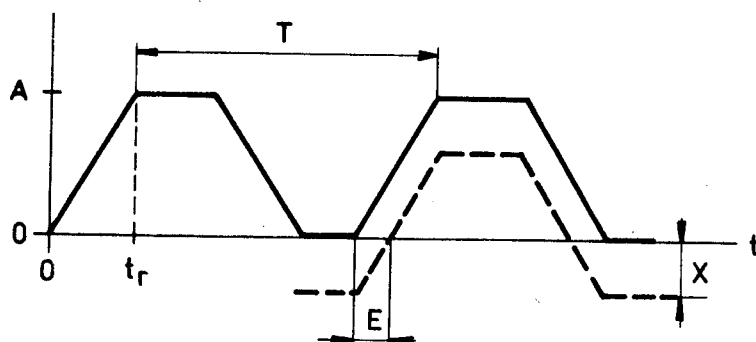
$$t_r \doteq \frac{1}{B}$$

(viz 3.41b). Touto "náhradou" se stane modulace citlivou na šum - viz obr. 8.45. Přičtením signálu o velikosti X se počátek impulsu posune o

$$E = X \frac{t_r}{A} . \quad (8.140)$$

Je-li X náhodné, je také E náhodné a jeho rozptyl

$$D[E] = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 D[X]. \quad (8.141)$$



Obr. 8.45

Je-li ve sdělovacím kanálu šum $N(t)$, pak opět

$$D[E] = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 D[N(t)]. \quad (8.142)$$

Změna polohy k -tého impulsu $\Delta_k = t_0 s(k T_{VZ})$ proti poloze bez modulace bude při přítomnosti šumu

$$\Delta_k = \Delta_k + E_k = t_0 s(k T_{VZ}) + E_k. \quad (8.143)$$

Na přijímací straně se poloha impulsů převádí na vzorky. Ty procházejí dolní propustí a napětí na jejím výstupu bude

$$s_D(t) = \sum_k \Delta_k \text{Sa}(\omega_m t - k\pi)$$

(viz (7.17)). Dosadíme (8.143) a dostaneme

$$s_D(t) = \sum_k t_0 s(k T_{VZ}) \text{Sa}(\omega_m t - k\pi) + \sum_k E_k \text{Sa}(\omega_m t - k\pi).$$

Každá ze sum představuje kmity se spektrem omezeným na pásmo $(-\omega_m, \omega_m)$.

Podle vzorkovací věty je první suma rovna $t_0 s(t)$, druhá je šum $E(t)$, tj.

$$s_D(t) = t_0 s(t) + E(t).$$

Střední výkon výstupního užitečného signálu je

$$S_0 = t_0^2 \widetilde{s^2(t)}, \quad (8.144)$$

a výkon šumu

$$N_0 = D[E(t)].$$

Podle [3] platí, že rozptyl šumu je roven rozptylu vzorků (stačí předpokládat, že šum je stacionární) a tedy podle (8.142)

$$N_0 = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \cdot D[N(t)] \doteq \left(\frac{1}{BA}\right)^2 D[N(t)]. \quad (8.145)$$

Pro určení vstupního poměru S_i/N_i předpokládáme, že je $t_r \ll T$ a lichoběžníkový impuls můžeme nahradit obdélníkovým. Je-li trvání impulsu τ , je jeho střední výkon

$$S_i = A^2 \frac{\tau}{T} . \quad (8.146)$$

Zřejmě je $N_i = D[N(t)]$ a tedy zlepšení odstupů signálu od šumu je

$$\boxed{\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = t_o^2 \frac{T}{\tau} B^2 \widetilde{s^2(t)}} . \quad (8.147)$$

Zlepšení odstupů signálu od šumu závisí tedy na kvadrátu šířky pásma.

8.2.3.3 PCM

a) Dvoustavová PCM

Aby bylo možné určit výkon signálu, je třeba znát hustotu pravděpodobnosti - předpokládáme, že je rovnoměrná v daném intervalu. Při dvoustavové PCM se pak stejně často vyskytují nuly a jedničky. Předpokládáme, že nula odpovídá hodnotě signálu 0, jednička hodnota A . Potom střední hodnota signálu je $A/2$ a rozptyl $A^2/2$. Proto $S_i = A^2/2$. Předpokládáme, že hodnotu A , odpovídající logické jedničce, volíme s ohledem na šum při přenosu kódu tak, aby byla K -krát větší než je směrodatná odchylka šumu

$$A = K \sigma_n . \quad (8.148)$$

Tím je dán i poměr S_i/N_i , protože musí být $N_i = \sigma_n^2$

$$S_i/N_i = K^2/2 \quad (8.149)$$

Jak jsme již uvedli, vzniká v soustavě tzv. kvantovací šum, který zavádí sám modulátor. Signál převádíme na diskretní úrovně. Rozdíl mezi úrovněmi - tzv. kvantovací krok - označme Δ . Šum kvantování je rozdíl mezi modulačním signálem a úrovní, na níž je signál převeden. Největší možná hodnota kvantovacího šumu je $\Delta/2$. Můžeme předpokládat, že signál je rovnoměrně rozložen na intervalu $\pm \Delta/2$ kolem úrovně, na níž je převeden. Víme, že rozptyl rovnoměrného rozložení je dán vztahem (6.86), což v našem případě je výkon kvantovacího šumu

$$N_q = \frac{\Delta^2}{12} . \quad (8.150)$$

To také je výkon šumu na výstupu $N_o = N_q$.

Dále určíme výkon výstupního signálu. Výstupní signál $S_q(t)$ získáme z kvantovaných vzorků S_{qk} modulačního signálu $s(t)$ po jejich průchodu dolní propustí (viz (7.17))

$$s_q(t) = \sum_k s_{qk} S_a(\omega_m t - k\pi) . \quad (8.151)$$

Vzhledem k ortogonalitě funkcí S_a můžeme použít Parsevalovu větu a pro střední výkon platí [3]

$$\overline{s^2_{qk}(t)} = \overline{s^2_{qk}} . \quad (8.152)$$

Má-li kvantovaný signál Q úrovní, které jsou stejně pravděpodobné, získáme za předpokladu velkého počtu vzorků

$$\overline{s^2_{qk}} = \sum_k P_k \cdot k^2 s_q^2 ,$$

kde k_{s_q} jsou hodnoty úrovní, tj. $\{k_{s_q}\}_{k=1}^Q = \{0, \Delta, 2\Delta, \dots, (Q-1)\Delta\}$.

Potom (viz [12])

$$\begin{aligned} \overline{s^2_{qk}} &= \frac{1}{Q} \{ 0^2 + \Delta^2 + (2\Delta)^2 + \dots + [(Q-1)\Delta]^2 \} = \\ &= \frac{\Delta^2}{Q} \sum_{k=0}^{Q-1} k^2 = \frac{\Delta^2}{Q} \frac{Q(Q-1)(2Q-1)}{6} = \Delta^2 \frac{(Q-1)(2Q-1)}{6} . \end{aligned}$$

(8.153)

Pro $Q \gg 1$ můžeme psát

$$\overline{s^2_{qk}} \doteq \frac{Q^2}{3} \Delta^2 = S_0 . \quad (8.154)$$

Ze vztahů (8.154), (8.150), (8.149) dostaneme

$$\boxed{\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{8Q^2}{K^2}} . \quad (8.155)$$

Při Q úrovních kvantování potřebujeme na jeden vzorek $\log_2 Q$ impulsů. Protože spektrum modulačního signálu je omezeno kmitočtem f_m [Hz], odebírá se za 1 sekundu $2f_m$ vzorků a systém musí být schopen přenášet $2f_m \log_2 Q$ impulsů za sekundu. K tomu je zapotřebí určitá šířka pásma.

Máme-li spojitý signál se šířkou pásma B [Hz], může být přenesen pomocí $2B$ vzorků za sekundu. Naopak můžeme tvrdit, že $2f_m$ nezávislých vzorků za sekundu představuje signál $\psi(t)$ se spektrem omezeným na pásmo $(0, f_m)$ Hz. Lze tedy tvrdit, že místo $2f_m$ vzorků můžeme přenášet signál $\psi(t)$ v pásmu šířky f_m [Hz]. Proto soustava s šířkou pásma B [Hz] může přenášet $2B$ impulsů za sekundu.

Pro přenos $2f_m \log_2 Q$ impulsů za sekundu potřebujeme tedy šířku pásma

$$B = f_m \log_2 Q$$

a z ní můžeme určit

$$Q^2 = 2^{2B/f_m}$$

a z (8.155) dostaneme

$$\boxed{\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{8}{K^2} 2^{2B/f_m}} . \quad (8.156)$$

b) μ -stavová PCM

Podle (8.135) je počet impulsů odpovídajících jednomu vzorku

$$\nu = \log_{\mu} Q.$$

Nechť opět dvě nejbližší úrovně mají vzdálenost $K\sigma_n$, kde σ_n je směrodatná odchylka šumu ve sdělovacím kanále. Potom impuls r -té úrovně ($r = 0, 1, \dots, \mu-1$) má amplitudu $A_r = r K \sigma_n$. Jsou-li hodnoty signálu rovnoměrně rozložené, jsou všechny úrovně impulsů stejně pravděpodobné. Potom střední kvadratická hodnota impulsů, tj. výkon

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{\mu} [A_0^2 + A_1^2 + \dots + A_{\mu-1}^2] = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\mu-1} r^2 K^2 \sigma_n^2 = \\ &= K^2 \sigma_n^2 \frac{(\mu-1)(2\mu-1)}{6}. \end{aligned} \quad (8.157)$$

V přijímači se dekoduje impulsový signál, vzorky procházejí dolní propustí a tak se rekonstruuje modulační signál. Opět je přítomen kvantovací šum. Jeho velikost není ovlivněna počtem stavů, jen vzdáleností úrovní. Proto poměr S_0/N_0 je stejný jako u dvoustavové PCM a

$$N_i = \sigma_n^2. \quad (8.158)$$

Potom z (8.150) (8.154), (8.157), (8.158) dostaneme

$$\boxed{\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{24 Q^2}{K^2(\mu-1)(2\mu-1)}}. \quad (8.159)$$

Zlepšení odstupu signálu od šumu můžeme opět vyjádřit šířkou pásma potřebnou pro přenesení kódu. Protože na jeden vzorek potřebujeme $\log_{\mu} Q$ impulsů, musí se přenášet $2 f_m \log_{\mu} Q$ impulsů za sekundu. K tomu je potřebná šířka pásma

$$B = f_m \log_{\mu} Q$$

a tedy

$$Q^2 = \mu^{2B/f_m}.$$

Potom

$$\boxed{\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{24}{K^2(\mu-1)(2\mu-1)} \mu^{2B/f_m}}. \quad (8.160)$$

Ve výše uvedených vztazích měly všechny impulsy kladné hodnoty a přenášela se tudíž stejnosměrná složka velikosti

$$\frac{K \sigma_n}{2} (\mu-1).$$

Tuto hodnotu lze odečíst od vstupního signálu a zmenšit tak hodnotu jeho výkonu na

$$S_i' = S_i - \left[\frac{K \sigma_n (\mu - 1)}{2} \right]^2 = \frac{K^2 \sigma_n^2}{12} (\mu^2 - 1). \quad (8.161)$$

Potom

$$\boxed{\frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{48}{K^2 (\mu^2 - 1)} \mu^{2B/f_m}} \quad (8.162)$$

Soustavy kódové impulsové modulace se používají pro přenos informací na velké vzdálenosti pomocí retranslačních stanic. Při každé retranslaci se signál zbaví šumu, protože se impulsy obnovují. Pokud je zakódovaný signál retranslační stanicí správně přijat, je vyslán zcela zbavený šumu. Kódové modulace tedy umožňují přenos na libovolnou vzdálenost, je-li dostatečný počet retranslačních stanic.

U modulací analogových se naopak šum kumuluje. To je hlavní důvod využívání kódových impulsových modulací v moderních radiových zařízeních. S tímto druhem modulace se např. setkáme u družicových systémů.

L I T E R A T U R A

- [1] Holý, S. - Vejražka, F.: Signály a soustavy. Praha, ČVUT 1980
- [2] Hoffner, V.: Úvod do teorie signálů. Praha, SNTL 1979
- [3] Lathi, B.P.: Communication systems. New York, J. Wiley 1968, nebo překlad Lathi, B.P.: Systémy předači informací. Moskva, Svjaz 1971
- [4] Chmúrny, Ján: Teoretická rádioelektronika I. Teória signálů. Bratislava, SVŠT 1983
- [5] Vích, R.: Transformace z a některá její použití. Praha, SNTL 1979
- [6] Prchal, J.: Signály a soustavy. Praha, ČVUT 1983
- [7] Trachtman, A.M.: Vveděníje v obobščennuju spektrálnuju teoriju signalov. Moskva, Sov. radio 1972
- [8] Škrášek, J. - Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I. Praha, SNTL 1983
- [9] Nečas, J. a kol.: Aplikovaná matematika I. Praha, SNTL 1977
- [10] Kolektiv: Aplikovaná matematika II. Praha, SNTL 1978
- [11] Čížek, V.: Diskrétní Fourierova transformace a její použití. Praha, SNTL 1981
- [12] Rektorys, K. a kol.: Přehled užité matematiky. Praha, SNTL 1968
- [13] Carlson, S.B.: Communication systems. New York, Mc Graw-Hill 1975
- [14] Gonorovskij, I.S.: Radiotěchničeskije čepi i signaly. Moskva, Sovětskoje radio 1971
- [15] Samojlo, K.A.: Radiotěchničeskije cepi i signaly. Moskva, Radio i svjaz 1982
- [16] Erdelyi, A.: Tables of integral transofrm. New York, Mc Graw-Hill 1954
- [17] Gold, B. - Rader, C.M.: Digital processing of signals. New York, Mc Graw-Hill 1969
- [18] Rabiner, L.R. - Gold, B.: Theory and application of digital signal proces-sing. New Jersey, Prentice-Hall 1975
- [19] Ptáček, M.: Digitální zpracování a přenos obrazové informace. Praha, NADAS 1983
- [20] Havrda, J. - Míka, S. - Přikryl, P.: Numerické metody a matematická statis-tika. Skriptum ČVUT. Praha, ČVUT 1980
- [21] Levin, B.R.: Teorie náhodných procesů a její aplikace v radiotechnice. Praha, SNTL 1965
- [22] Davenport, W.B. - Root, W.L.: An introduction to the theory of random signals and noise. New York, Mc Graw-Hill 1958 nebo ruský překlad Davenport, V.B. - Rut, V.L.: Vveděníje v teoriju slučajnych signalov i šumov. Moskva, Izd. inostrannoj litěraty 1960
- [23] Pugačev, V.S.: Teorija slučajnych funkcij. Moskva, Fizmatgiz 1962
- [24] Panter, P.: Modulation, noise and spectral analysis. New York, Mc Graw-Hill 1965
- [25] Taub, H. - Schilling, D.L.: Principles of communication systems. New York, Mc Graw-Hill 1971

OBSAH

1. Základní charakteristiky signálů a soustav	3
1.1 Signály a soustavy	3
1.2 Druhy signálů	4
1.3 Singulární signály. Diracův impuls	6
1.3.1 Jednotkový skok	6
1.3.2 Přepínací signál	7
1.3.3 Obdélníkový impuls	8
1.3.4 Diracův impuls	8
1.4 Střední hodnota v čase, výkon a energie signálu	10
1.5 Vzájemný výkon a vzájemná energie. Ortogonální signály	12
1.6 Korelační funkce	13
1.7 Konvoluce	15
2. Periodické signály a jejich spektrum	17
2.1 Harmonické signály	17
2.2 Součet harmonických signálů	20
2.3 Fourierovy řady	21
2.3.1 Trigonometrická Fourierova řada	21
2.3.2 Komplexní Fourierova řada	24
2.3.3 Fyzikální interpretace koeficientů Fourierovy řady	25
2.3.4 Chování vyšších harmonických složek	29
2.3.5 Zvláštní případy signálů	30
2.3.6 Stejnoseměrná konvergence a Gibbsův jev	32
2.3.7 Fourierova řada neperiodického signálu	33
2.3.8 Spektrum sledu obdélníkových impulsů	33
2.4 Vzájemná korelační a autokorelační funkce period. signálů	37
2.4.1 Autokorelační funkce harmonického signálu	38
2.4.2 Autokorelační funkce sledu obdélníkových impulsů	39
3. Neperiodické determinované signály a jejich spektrum	40
3.1 Fourierova transformace	40
3.1.1 Amplitudové a fázové spektrum	42
3.1.2 Hlavní vlastnosti Fourierovy transformace	43
3.2 Fourierova transformace některých signálů	49
3.3 Vztah mezi Fourierovou řadou a Fourierovou transformací	53
3.4 Délka signálu a šířka jeho spektra	55
3.5 Korelační funkce neperiodických signálů	57
3.6 Spektrum harmonického signálu a harmonického impulsu	59
3.6.1 Spektrum harmonického signálu	59
3.6.2 Harmonický (rádiový) impuls	59
3.7 Hilbertova transformace. Analytický signál	61
3.7.1 Hilbertova transformace	62
3.7.2 Analytický signál	63
3.7.3 Spektrum Hilbertova signálu	65
4. Diskrétní Fourierova transformace	66
4.1 Princip a základní vztahy	67
4.2 Vztah mezi Fourierovou řadou, Fourierovou transformací a diskrétní Fourierovou transformací	70

4.3	Maticový zápis DFT	72
4.4	Základní vlastnosti DFT	73
4.5	Rychlá Fourierova transformace	82
4.5.1	Rychlá Fourierova transformace s redukcí času	83
4.5.2	Rychlá Fourierova transformace s redukcí kmitočtu	89
4.5.3	Použití algoritmu FFT pro výpočet inverzní DFT	92
5.	Zobecněná Fourierova transformace	92
5.1	Analogie mezi vektory a signály	92
5.1.1	Vektory	92
5.1.2	Signály	94
5.1.3	Soustava ortogonálních vektorů	95
5.1.4	Soustava ortogonálních signálů	96
5.1.5	Komplexní ortogonální funkce	99
5.1.6	Vyjádření libovolného signálu zobecněnou Fourierovou řadou na nekonečném intervalu času	99
5.2	Systémy ortogonálních funkcí používané pro rozklad signálů	100
5.2.1	Systém funkcí $\{\cos kt, \sin kt\}$	100
5.2.2	Systém funkcí $\{\exp(jnt)\}$	101
5.2.3	Systém funkcí $\{\cos kt\}$	102
5.2.4	Systém funkcí $\{\sin kt\}$	103
5.2.5	Systém obdélníkových vzájemně se nepřekrývajících impul- sů $\{\text{rect}\}$	103
5.2.6	Systém funkcí $\{\text{Sa}(t-n\pi)\}$	104
5.2.7	Systém Rademacherových funkcí	108
5.2.8	Walshovy funkce	108
5.2.9	Další ortogonální systémy. Ortonormalizace	113
5.2.10	Vztah mezi zobecněnou a komplexní Fourierovou řadou	114
6.	Náhodné signály	115
6.1	Náhodné jevy a jejich pravděpodobnosti	115
6.2	Náhodné veličiny	119
6.2.1	Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny	120
6.2.2	Číselné charakteristiky náhodných veličin	123
6.2.3	Soustavy náhodných veličin	125
6.2.4	Číselné charakteristiky soustav náhodných veličin	129
6.2.5	Podmíněná distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti. Podmíněné číselné charakteristiky	132
6.2.6	Transformace náhodných veličin	133
6.2.7	Některé typy rozložení náhodných veličin	139
6.3	Náhodné procesy	145
6.3.1	Náhodný proces a jeho charakteristiky	145
6.3.2	Stacionární a ergodické náhodné procesy	150
6.3.3	Doba korelace	154
6.3.4	Dvojice náhodných procesů	155
6.3.5	Korelační příjem periodických signálů	156
6.3.6	Spektrální výkonová hustota	157

7. Přenos signálů soustavami	161
7.1 Lineární soustavy	161
7.1.1 Charakteristiky lineárních soustav	162
7.1.2 Podmínky nezkresleného přenosu	163
7.1.3 Ideální filtry	164
7.1.4 Fyzikální realizovatelnost	166
7.2 Nelineární soustavy	166
7.3 Přenos náhodných signálů soustavami	169
7.3.1 Přenos náhodných signálů lineárními soustavami	169
7.3.1.1 Přenos bílého šumu lineární soustavou	171
7.3.1.2 Obálka a fáze normálního náhodného procesu na výstupu úzkopásmové lineární soustavy	173
7.3.2 Přenos náhodných signálů nelineárními soustavami	178
8. Modulované signály	179
8.1 Modulace harmonického nosného signálu	180
8.1.1 Amplitudová modulace	180
8.1.1.1 Amplitudová modulace s potlačenou nosnou vlnou	180
8.1.1.2 Amplitudová modulace s nosnou vlnou	186
8.1.1.3 Amplitudová modulace s jedním postr. pásmem a potlačenou nosnou	191
8.1.1.4 Amplitudová modulace s částečně potlačeným postranním pásmem	197
8.1.1.5 Šumové poměry u AM	199
8.1.2 Úhlová modulace	204
8.1.2.1 Kmitočtová modulace harmonickým signálem	209
8.1.2.2 Kmitočtová modulace několika harm. signály	213
8.1.2.3 Kmitočtová modulace periodickým obdélníkovým signálem	214
8.1.2.4 Úzkopásmové úhlové modulace	215
8.1.2.5 Modulační soustavy pro úhlové modulace	216
8.1.2.6 Demodulační soustavy pro FM	217
8.1.2.7 Šumové poměry u úhlových modulací	218
8.2 Impulsová modulace	222
8.2.1 Analogová impulsová modulace	223
8.2.1.1 Impulsová amplitudová modulace PAM	224
8.2.1.2 Impulsová šířková modulace PDM	228
8.2.1.3 Impulsová polohová modulace PPM	228
8.2.2 Číslicová impulsová modulace	229
8.2.2.1 Kódová impulsová modulace PCM	229
8.2.2.2 Delta modulace DM	231
8.2.3 Šumové poměry u impulsové modulace	234
8.2.3.1 PAM	234
8.2.3.2 PPM	234
8.2.3.3 PCM	236
Literatura	240